

饱和湿大气 Brunt-Väisälä 频率及修正的相当位温*

刘 栋

(中国科学院大气物理研究所, 北京, 100029; 中国科学院研究生院, 北京, 100039)

高守亭

(中国科学院大气物理研究所, 北京, 100029)

摘 要

实际大气中受扰动的饱和气块发生凝结后, 凝结水会部分脱离气块。以前研究饱和湿大气的 Brunt-Väisälä 频率 (N_m^2) 没有考虑凝结水的部分脱离, 相当位温 (θ_e) 也忽略了饱和气块的混合比的作用。文中针对这些不足, 在假设饱和空气中只存在气液转换条件下, 推导出液态水部分脱离气块的、更符合实际情况的 N_m^2 表达式和修正的饱和湿大气 θ_e 表达式。新的 N_m^2 表达式增加了部分脱离气块的液态水的作用项, 新的 θ_e 表达式中包含有饱和气块的混合比, 并对有关的表达式分别作了讨论和比较。

关键词: 饱和湿空气, Brunt-Väisälä 频率, 相当位温。

1 引 言

稳定湿抬升中的潜热释放对大气环流系统的动力影响可归纳为两种方法^[1]: 一种称为外部法, 即把潜热释放认为是一种外部强迫机制, 它改变大气的热动力特性且驱动或有助于驱动垂直环流; 另一种称为层结法, 指潜热释放被显式地认为与上升运动成正比, 这样该过程可表示成对热动力方程的垂直平流项中层结的修正。实际应用中, 理论学家更倾向采用层结法^[2~5], 但作诊断的学者更倾向采用外部法^[6,7]; 其它过程的诊断研究, 例如锋生过程, 也常用外部法^[8]。

理查逊数(以下简称 Ri) 和 Brunt-Väisälä 频率(以下简称 N^2) 是流体力学和动力气象中应用比较广泛的参数, 常用作不稳定判据。后者直接影响 Ri , 且常出现在反映流体特性的各种特征数中, 如 Rayleigh 数, Froude 数等。以前的研究中, 特别是在研究有关尺度不稳定的问题时, 常以 Ri 的大小为稳定与否的判据, 但过去的研究中多注意 Ri 的分母作用, 即风速垂直切变的大小而对 Ri 的分

子作用, 而对 N^2 大小的研究不够。实际上 N^2 的大小对 Ri 也有很大的影响, 特别是在湿过程中。

N^2 基本定义为: 在层结稳定的大气中气块受小扰动时的振荡频率。当大气是不饱和或干空气时, N^2 可表示为:

$$N^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma_d \right) \quad \text{或} \quad N^2 = \frac{g}{v} \frac{d\theta}{dz} \quad (1)$$

T , θ 分别是气温和位温, Γ_d 是干空气绝热递减率, g 是重力加速度。当大气饱和时, 受向上小扰动的气块中水汽会凝结并释放潜热, 其热量部分地补偿了气块因绝热膨胀的冷却, 使得饱和气块与环境的密度差小于不饱和或干时的气块与环境的密度差, 气块所受的浮力变小; 对向下小扰动的气块, 由于蒸发吸收潜热也会产生类似的浮力(恢复力)变小, 这样有效的 N^2 (以下称为 N_m^2) 要比干空气块的小。

国际上有些学者用层结法研究了饱和大气的 N_m^2 , Dudis^[9], Fraser 等^[10], Lalas 和 Einaudi^[11] 分别给出不同的 N_m^2 表达式, Durran 和 Klemp^[12] 通过更简单的气块法推导了饱和湿大气的 N_m^2 , 证明 Lalas 和 Einaudi 的 N_m^2 表达式是正确的, 又给出了包含相

* 初稿时间: 2002 年 12 月 20 日; 修改稿时间: 2003 年 2 月 19 日。

资助课题: 中国科学院知识创新工程项目(KZCX3-SW-213 及 KZCX2-208)。

当位温(以下简称 θ_e) 为变量的 N_m^2 表达式, 但他们在推导 N_m^2 过程中没有考虑液态水部分脱离气块时的情况。同时 θ_e 准确与否又直接影响 N_m^2 , 因此需进一步研究饱和气块的 θ_e 。

又由于 θ_e 使用广泛, 如用它表达湿绝热上升的有效层结, 所以对它的研究也比较多。最早由 Holton^[13] 提出 θ_e , Bettes 和 Dugan^[14], Bettes 和 Miller^[15] 分别检查了前者的工作, 但前者的 θ_e 公式作了近似, 这样使计算产生的误差可高达 3 K^[16], Bolton^[17] 在总结前人工作的基础上, 对于饱和水汽压、位于抬升凝结高度层的温度和 θ_e 3 个变量, 提出了新的经验公式, 并对它们进行了误差评估, 把他的结果与文献[14]和[16]的结果做了比较, 但他推导 θ_e 时作了近似, 同时没有得出解析解。

实际大气中受扰动的饱和气块发生凝结后, 凝结水会部分脱离气块, 上述推导 N_m^2 时没有考虑这种情况, 同时推导 θ_e 时又做了近似。本文针对这两种情况, 推导出完全的 N_m^2 表达式和修正的 θ_e 表达式。为推导简单, 假设饱和空气中只存在气液转换。

2 完全的 N_m^2 表达式

假设大气总是处在饱和状态, 气块仅按绝热过程变化, 环境中液态水少, 这样液态水以十分小的液滴分布, 就不会产生降水也不存在对空气运动的内部拖曳。

气块在其平衡位置受小扰动时的加速度为:

$$a = -g \frac{\rho_p - \rho_e}{\rho_p} \quad \text{即} \quad a = N_m^2 \delta z$$

ρ_p , ρ_e 分别为气块和环境的密度, 在平衡位置($\delta z = 0$, $\rho_p(0) = \rho_e(0)$)按 Taylor 级数展开, 得

$$N_m^2 = g \left[\left(\frac{d \ln \rho}{dz} \right)_p - \left(\frac{d \ln \rho}{dz} \right)_e \right] \quad (2)$$

饱和空气块的气压可表示为干空气气压、水汽压之和:

$$P_m = \rho_d R_d T + \rho_v R_v T = \rho_d R_d T \left(1 + \frac{\rho_v R_v}{\rho_d R_d} \right)$$

上式中的变量下标 d, v 分别代表干空气和水汽, 其余为常用量。饱和气块的密度可表示为: $\rho = \rho_d + \rho_v + \rho$, 其中 ρ 为液态水的密度, 则状态方程可写为:

$$P_m = \rho_d R_d T \left(1 + \frac{\rho_v R_v}{\rho_d R_d} \right) = \rho R_d T \rho_d \frac{1 + \frac{\rho_v R_v}{\rho_d R_d}}{\rho_d + \rho_v + \rho}$$

$$= \rho R_d T \frac{1 + \frac{r_s}{\varepsilon}}{1 + r_s + r_l} = \rho R_d T \frac{1 + \frac{r_s}{\varepsilon}}{1 + r_w} \quad (3)$$

r_s 为饱和混合比, r_l 为液态水的“混合比”, r_w 为总混合比, $\varepsilon = R_d/R_v$, 将密度 ρ 代入式(2)中并假设扰动后气块气压与环境气压相同, 得:

$$N_m^2 = g \left[\frac{1}{T} \frac{dT}{dz} + \frac{1}{r_s + \varepsilon} \frac{dr_s}{dz} - \frac{1}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \right] \Big|_p^e \quad (4)$$

式(4)中, dr_s/dz 可由 Clausius-Clapeyron 方程变换为水汽压、气压表达的关系式, 即:

$$\frac{dr_s}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\varepsilon e_s}{P - e_s} \right) = \left(1 + \frac{r_s}{\varepsilon} \right) \left(\frac{\varepsilon R_s dT}{R_d T^2 dz} - \frac{r_s dP}{P dz} \right) \quad (5)$$

e_s 为饱和水汽压, 将式(5)代入(4)中得

$$N_m^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma_m \right) \cdot \left(1 + \frac{L r_s}{R_d T} \right) - \frac{g}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \Big|_p^e \quad (6)$$

Γ_m 为饱和气块的温度递减率, 且

$$\frac{g}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \Big|_p^e = \left(\frac{g}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \right)_e - \left(\frac{g}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \right)_p = \left(\frac{g}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \right)_e - \left(\frac{g}{1 + r_w} \frac{d(r_s + r_l)}{dz} \right)_p$$

以下分两种情况讨论:

(I) 气块处在可逆湿绝热过程中(没有液态水脱离), r_w 为常数, 即 $\left(\frac{d(r_s + r_l)}{dz} \right)_p = 0$, 式(6)变为

$$N_m^2 = \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma_m \right) \left(1 + \frac{L r_s}{R_d T} \right) - \frac{g}{1 + r_w} \frac{dr_w}{dz} \quad (7)$$

其中最后一项是相对于环境的。

由上式可知对于处在可逆湿绝热过程的气块满足以下关系式:

$$\begin{cases} \frac{dr_w}{dz} = \frac{d(r_s + r_l)}{dz} = \frac{dr_s}{dz} + \frac{dr_l}{dz} \\ \frac{dr_s}{dz} = -\frac{dr_l}{dz} \end{cases} \quad (8)$$

(II) 当气块抬升过程中液态水部分脱离, 但仍保持饱和时, 对于气块的 r_l 变化有:

$$\dot{r}_l(z) = r_l(z_0) + \alpha \Delta r_l$$

α 为剩余液态水占脱离前液态水的百分比, 对于气

块这时有

$$\begin{aligned} \frac{dr_w}{dz} &= \frac{dr_s}{dz} + \frac{dr_l}{dz} = \frac{dr_s}{dz} + \alpha \frac{dr_l}{dz} \\ &= \frac{dr_s}{dz} + \frac{dr_l}{dz} - (1-\alpha) \frac{dr_l}{dz} \\ &= \frac{dr_w}{dz} + (1-\alpha) \frac{dr_s}{dz} = (1-\alpha) \frac{dr_s}{dz} \end{aligned}$$

因此, 当有部分液态水脱离气块时, 式(6)变为

$$\begin{aligned} N_m^2 &= \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma_m \right) \left(1 + \frac{Lr_s}{R_d T} \right) - \\ &\quad \left[\frac{g}{1+r_w} \frac{dr_w}{dz} \right]_e - \left[\frac{g(1-\alpha)}{1+r_w} \frac{dr_s}{dz} \right]_p \\ &= \frac{g}{T} \left(\frac{dT}{dz} + \Gamma_m \right) \left(1 + \frac{Lr_s}{R_d T} \right) - \\ &\quad \frac{g}{1+r_w} \left[\frac{dr_w}{dz} \right]_e + (1-\alpha) \left[\frac{dr_s}{dz} \right]_p \end{aligned} \quad (9)$$

Γ_m 为饱和空气块的温度递减率, r_w 指未抬升的总混合比。

对于式(7), Durran 和 Klemp^[12]做了计算比较, 发现 N_m^2 值会出现负值, 且总小于干空气的 N^2 。由于气块中液态水的垂直变化很难确定, 式(9)虽考虑到液态水部分脱离, 但不好计算, 从式(9)可知 N_m^2 理论值会比式(7)的值更小, 但两者差别不会太大。由此可知, 若稳定的饱和大气受扰动, 可能会出现静力不稳定, 这时用干空气的 R_i 来确定稳定与否就会产生错误。

3 修正的 θ_e 表达式

由热力学定律, 对于可逆湿绝热过程饱和湿空气熵守恒^[18], 即

$$\begin{aligned} ds &= c_{pd}(\ln \theta_d) + d \left(\frac{r_s L}{T} \right) + \\ &\quad (r_s + r_l) C_l d(\ln T) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\theta_d = T \left(\frac{P_0}{P_d} \right)^{R_d/c_{pd}}$$

其中 r_s 是饱和水汽混合比, r_l 是液态水混合比, P_d 是干空气分压强, P_0 是参考态气压, C_l 是液态水比热, c_{pd} 是干空气定压比热, L 是汽化比热, T 是温

度, R_d 是干空气气体常数。

$r_w = r_s + r_l$ 为常数

那么式(10)可变为:

$$c_{pd} d(\ln T) - R_d d(\ln P_d) + d \left(\frac{r_s L}{T} \right) + d(r_w C_l \ln T) = 0 \quad (11)$$

从而有^[12]

$$\theta_e \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{c_{r_w}}{c_{pd}}} = \theta_q = \text{常数} \quad (12)$$

$$\text{或 } \theta_q = T \left(\frac{P_0}{P_d} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd} + c_l r_w}} \exp \left[\frac{r_s L}{(c_{pd} + C_l r_w) T} \right]$$

$$\text{其中 } \theta_e = T \left(\frac{P_0}{P_d} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}} \exp \left(\frac{r_s L}{c_{pd} T} \right)$$

而以前的很多研究中完全忽略式(10)中最后一项,

$$d(\ln \theta_d) + d \left(\frac{r_s L}{c_{pd} T} \right) = 0 \quad (13)$$

$$\text{即 } \theta_e = T \left(\frac{P_0}{P_d} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd}}} \exp \left(\frac{r_s L}{c_{pd} T} \right) \quad (14)$$

若只忽略式(11)中最后一项中的液态水混合比 r_l 的作用, 也就是忽略了液态水的增减和温度升降引起的液态水热量变化所产生的作用, 那么该气块仍始终保持饱和时则有

$$d(\ln \theta_d) + d \left[\frac{r_s L}{c_{pd} T} \right] + d \left(\frac{r_s C_l}{c_{pd}} \ln T \right) = 0 \quad (15)$$

这时可定义一个新的位温

$$\theta'_e = \theta_e \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{C_l r_s}{c_{pd}}} \quad (16)$$

$$\text{或 } \theta'_e = T \left(\frac{P_0}{P_d} \right)^{\frac{R_d}{c_{pd} + C_l r_s}} \exp \left[\frac{r_s L}{(c_{pd} + C_l r_s) T} \right]$$

其中 T_0 为参考温度, 与参考气压 P_0 没有关系。不包含液态水混合比 r_l , 它由饱和湿空气的温度 T 和气压 P_d 完全确定。由于 r_l 比较难于观测确定, 所以 θ'_e 比 θ_q 易于应用。另一方面, 因图 1 中 3 个公式的曲线为饱和湿空气液态水一般不会完全脱离气块, 因此 θ'_e 比 θ_e 更好地描述了饱和湿空气的变化。图 1 中由式(12), (14), (16)画出的曲线, 分别代表

表 1 根据式(12), (14), (16)算出的相应位温值

P (hPa)	T (°C)	θ_q (K)	θ_e (K)	θ'_e (K)	$\theta_e - \theta_q$ (K)	$\theta'_e - \theta_q$ (K)
1000	30	366.3	382.7	373.6	16.4	7.3
900	25	360.5	373.7	366.5	13.2	6.0
800	20	357.2	368.4	362.4	11.2	5.2
700	12	347.1	354.4	350.6	7.3	3.3
500	0	352.5	358.3	355.3	5.8	2.8

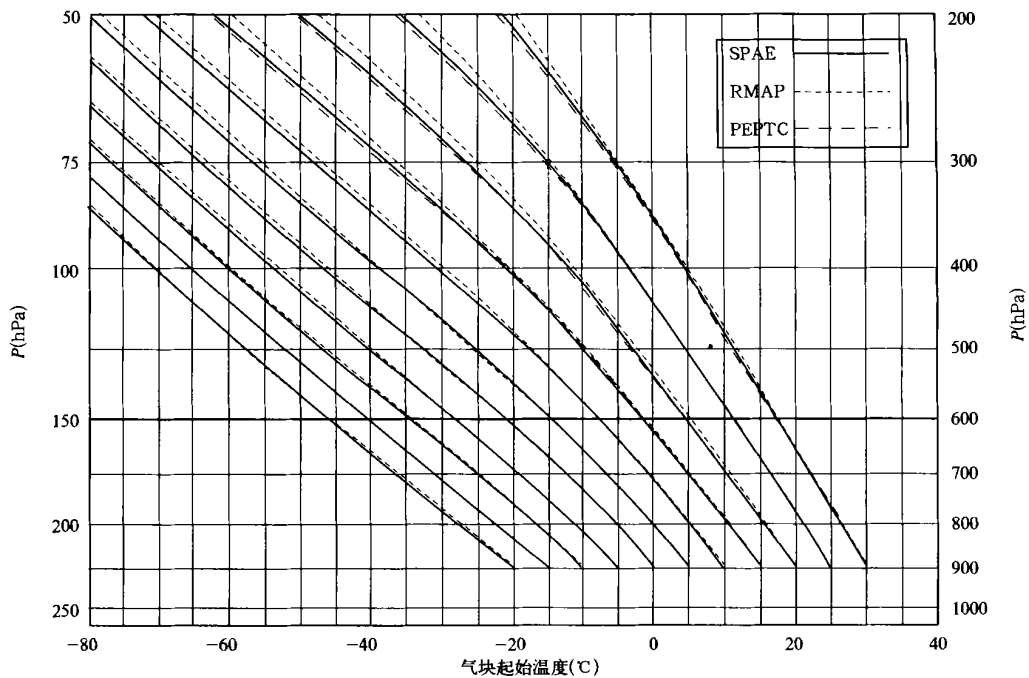


图1 温度对数压力图中3个公式的曲线

可逆湿绝热过程(RMAP)、相当位温(PEPTC)、不考虑液态水过程(SPAE)。由图可知,在低层三者差别不大,400 hPa以上才会出现明显差别,在200 hPa上误差达3℃。这样式(16)更好地代表了实际饱和大气的变化情况,有一定的使用意义。

为了更好的比较这3个不同表达式的差别,在只考虑气液两种转换条件下计算3个表达式的值,具体值见表1。由表1可知,在这里计算的低层 θ_e 与 θ_q 的差值较大, θ_e 与 θ_q 的差值比前者差值小,虽然从1000 hPa到500 hPa这种趋势一直存在,但在中高层后者的差值越小,这说明气块在始终饱和

参考文献

- 1 John W, Nielsen-Gammon, Daniel Keyser. Effective stratification for pseudo-adiabatic ascent. *Mon Wea Rev*, 2000, 128: 3007~ 3010
- 2 Emanuel K A. Frontal circulations in the presence of small moist symmetric stability. *J Atmos Sci*, 1985, 42: 1062~ 1071
- 3 Emanuel K A, Rantini M, Thorpe A J. Baroclinic instability in an environment of small stability to slantwise moist convection. Part I: Two dimensional models. *J Atmos Sci*, 1987, 44: 1559~ 1573
- 4 Xu Q. Extended Sawyer-Eliassen equation for frontal circulations in the presence of small viscous moist symmetric stability. *J Atmos Sci*, 1989, 46: 2671~ 2683
- 5 Whitaker J S, Davis C A. Cyclogenesis in a saturated environment. *J Atmos Sci*, 1994, 51: 889~ 907
- 6 Kuo Y-H, Shapiro M A, Donall E G. The interaction between baroclinic and diabatic processes in a numerical simulation of a rapidly intensifying extratropical marine cyclone. *Mon Wea Rev*, 1991, 119: 368~ 384
- 7 Pauley P M, Nieman S J. A comparison of quasigeostrophic and nonquasigeostrophic vertical motions for a model simulated rapidly intensifying marine extratropical cyclone. *Mon Wea Rev*, 1992, 120: 1108~ 1134
- 8 Schultz D M, Steenburgh W J. The formation of a forward-tilting cold front with multiple cloud bands during Superstorm 1993. *Mon Wea Rev*, 1999, 127: 1108~ 1124

的条件下,式(16)更好的反映了气块的实际变化,理论上有一定的使用意义。

4 小结

本文针对大气中饱和气块液态水变化的实际情况,即液态水可部分脱离气块,首先提出了较完全的 N_m^2 表达式,式中体现了气块中液态水的部分脱离,并作了定性讨论;其次对以前两种极端情况:饱和可逆湿绝热过程和不考虑水汽、液态水的作用,提出第三种情况,只考虑水汽的作用,得出新的相当位温表达式,并将该式与以前两式作了比较,这个新变量比 θ_e 更好地描述了饱和湿空气的变化。

- 9 Dudis J J. The stability of a saturated, stably-stratified shear layer. *J Atmos Sci*, 1972, 29: 774~ 778
- 10 Fraser A B, Easter R C, Hobbs P V. A theoretical study of the flow of air and fallout of solid precipitation over mountainous terrain: Part I. Air flow model. *J Atmos Sci*, 1973, 30: 801~ 812
- 11 Lalas D P, Einaudi F. On the correct use of the wet adiabatic lapse rate in stability criteria of a saturated atmosphere. *J Appl Meteor*, 1974, 13: 318~ 324
- 12 Durran D R, Klemp J B. On the effects of moisture on the Brunt-Vaisala frequency. *J Atmos Sci*, 1982, 39: 2152~ 2158
- 13 Holton J R. *An Introduction to Dynamical Meteorology*. Academic Press, 1972. 319pp
- 14 Betts A K, Dugan F J. Empirical formula for saturation pseudo-adiabats and saturation equivalent potential temperature. *J Appl Meteor*, 1973, 12: 731~ 732
- 15 Betts A K, Miller R D. VIMHEX 1972 Rawinsonde Data. Dept. of Atmospheric Science, Colorado State University, 1975, 178pp
- 16 Simpson R H. On the computation of equivalent potential temperature. *Mon Wea Rev*, 1978, 106: 124~ 130
- 17 Bolton D. The computation of equivalent potential temperature. *Mon Wea Rev*, 1980, 108: 1046~ 1053
- 18 Emanuel K A. *Atmospheric Convection*. New York Oxford: Oxford University press, 1994. 580pp

THE BRUNT-VAISALA FREQUENCY IN A SATURATED ATMOSPHERE AND THE REVISED EQUIVALENT POTENTIAL TEMPERATURE

Liu Dong

*(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029;
Graduate School of the Chinese Academy of Sciences, Beijing 100039)*

Gao Shouting

(Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029)

Abstract

If a parcel of air is displaced slightly upward in an unsaturated atmosphere, it will cool by adiabatic expansion. If the atmosphere is saturated, upward displacements are also accompanied by condensation and latent heating. After an infinitesimal perturbation, the condensed liquid water will drop partially out of the parcel. This phenomenon was not described in the Brunt-Vaisala frequency (N_m^2) in previous studies, although they have been studied in many aspects, especially in the stability reduction quantified by deriving an expression for the saturated Brunt-Vaisala frequency (N_m^2). At the same time, deriving an expression for equivalent potential temperature (θ_e) in previous studies also omits a term, mixing ratio of saturated vapor in air parcel. For simplicity, we consider only liquid-vapor phase transitions during derivation. A new formula of expressing N_m^2 , according to an air parcel change in a saturated atmosphere, is derived, discussed, and compared with original expression. It contains an additional term: the liquid water dropping partially out of the parcel, so that the new formula of expressing N_m^2 accurately describes an air parcel change in a saturated atmosphere, it is useful in theory. In Section 3, an accurate formula of expressing θ_e is derived under the condition that no neglecting the mixing ratio of saturated vapor. Results are estimated and compared with two other θ_e formulas. Results of the new equivalent potential temperature (θ_e) are showed the less error in middle and high atmosphere. These two revised formulas N_m^2 and θ_e describing the stability of a saturated atmosphere are reasonably accurate and applicable for the dynamic diagnosis.

Key words: Saturated atmosphere, Brunt-Vaisala frequency, Equivalent potential temperature.