

Saltzman 气候模式的新格式及其应用*

封国林 曹永忠

(扬州大学理学院物理系, 扬州, 225009)

曹鸿兴

(中国气象科学研究院, 北京, 100081)

摘 要

云反馈是影响气候变化的重要因子, 它导致气候模拟的不确定性。为此, 针对云反馈提出了一种参数化方案, 随后推导一个包含云反馈在内的大气-海洋-海冰模式。云反馈是通过短波辐射引入的, 而二氧化碳温室效应是在长波辐射中引入的。经过繁杂的推导, 得到了模式方程组, 它是一个双变量非线性常微分方程组。通过数值计算模拟了 CO_2 变化时气候系统的增温量。平衡试验表明, 当 CO_2 从 330×10^{-6} 增加到 660×10^{-6} 时, 全球平均增温量为 1.7°C , 瞬变试验时, 增温量为 1.3°C 。

关键词: 气候模拟, CO_2 温室效应, 大气-海洋-海冰耦合。

1 引 言

Saltzman 模式是一个大气-海洋-海冰耦合低维模式, 其中非绝热过程都是高度参数化的, 模式变量为海洋温度和海冰冰界, 这是因为当极地海冰向南伸展时, 会把更多海洋盖住, 海冰起绝缘作用, 防止热量从海洋中损失; 反之, 海洋会损失热量, 冰界犹如一个海洋-海冰-大气系统反馈回路的调节阀^[1]。Saltzman 模式虽是一个简化机制模式, 却包含了多种物理过程。1989 年, 王勤学、曹鸿兴将气溶胶变化引入该模式中^[2], 并用它作了非线性方面的理论探讨, 研究模式在不同参数下, 如气溶胶浓度变化时的模式行为特征, 产生混沌、不动点吸引子的条件等, 是一种基础研究。

目前在 CO_2 对气候的温室效应模拟中, 无论用大气环流模式(GCM) 或者用海-气耦合模式(CGCM) 进行 CO_2 浓度倍增的试验, 发现了影响模拟结果的主要不确定性因素, 即云反馈、海洋过程和生物反馈。其中, 云反馈过程由于云种类和过程的多变性, 数学参数化更为困难, 更直接影响模拟结果, 因此文中试图把云反馈过程包含在模式中。

这里构造了一个云反馈的参数化方案, 导出了新的模式方程组, 用这一模式研究了 CO_2 温室效应。

* 初稿时间: 1997 年 11 月 3 日; 修改稿时间: 1998 年 3 月 25 日。

资助课题: 国家“八五”攻关课题“气候变化规律及其数值模拟研究”及国家自然科学基金(49675262)。

2 模式原理

2.1 海表热平衡方程

记 H_S, H_{IR}, H_{SN} 分别为短波辐射、长波辐射和感热引起的海表垂直通量, H_E, H_M 分别为蒸发潜热和融(冻)冰引起的垂直热通量, H_I 为在海冰区通过海冰交界面传导和对流引起的向上垂直热通量。记海洋深度为 D , 纬向用 $x = \sin \varphi$ 表示, φ 为纬度, T 为海洋温度, 定义整个海洋的平均温度为

$$\theta = \frac{1}{D} \int_0^D T dz dx \quad (1)$$

海表热平衡方程为

$$C_w \rho_w D \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + C_w \rho_w D \bar{\tau}_v = H_S + H_{IR} + H_{SN} + H_E + H_M - H_I \quad (2)$$

式中 C_w 和 ρ_w 分别为海水比热和密度, 海洋垂直平均温度为

$$\bar{T} = \frac{1}{D} \int_0^D (T - 273) dz \quad (3)$$

v 为南北向风速, $\bar{\tau}_v$ 表示 τ_v 的垂直平均。将式(2)由 $x = 0$ 到 1 进行积分, 假定赤道和极地无热交换, 左边第二项积分后为 0, 即海洋上下、南北的热扩散相互抵消为 0^[1]。于是得到关于海洋平均温度变化方程

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{C_w \rho_w D} \left[\int_0^\eta (H_S + H_{IR} + H_{SN} + H_E) dx - \int_\eta^1 H_I dx + \int_0^1 H_M dx \right] \quad (4)$$

式中 η 为冰界位置, 为纬度的正弦即 $\eta = \sin \varphi$ 。由于海冰的绝热作用, 因此式(4)右边第一项在 $x = \eta$ 和 $x = 1$ 之间不存在, 而 $x = 0$ 和 $x = \eta$ 之间的非海冰区不存在 H_I , 由融冰引起的热通量为

$$H_M = -L_f M \quad (5)$$

式中 L_f 为在 273 K 时融冰潜热, M 为融冰率。蒸发潜热通量

$$H_E = -L_v E \quad (6)$$

式中 L_v 为 273 K 时的蒸发潜热, E 为蒸发率。

$H_S, H_{IR}, H_{SN}, H_E, H_I$ 的参数化与文献[1, 3]类同。

2.2 冰界方程

忽略由于降雪造成的海冰累积, 假设所有海冰变化源于海水结冰或融化, 则海冰质量连续方程为

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 m_i dx = - \int_0^1 M dx \quad (7)$$

式中 m_i 为单位水平面积上的冰质量, M 为单位水平面积上融冰率。经进一步假定再推导得冰界 η 随融冰率 $M(\eta)$ 而变的方程^[1]为

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{\delta}{2\rho_i L} M(\delta) \quad (8)$$

式中 δ 为海冰活动带移动量, 从 $x = \eta$ 处向赤道移动(结冰)时 δ 为负, 向极地移动(融冰)时 δ 为正。 ρ_i 为冰密度, L 为海冰厚度。

3 无云反馈模式

在 Saltzman 模式中, 没有考虑大气气溶胶的影响。王勤学、曹鸿兴将气溶胶对短波辐射的吸收和散射引入模式^[2], 运用 King 等^[4]的方法建立了实验式, 即气溶胶的吸收率和反向散射率与气溶胶光学厚度之间的关系式, 其中包括该光学厚度的一次项和二次项, 每项系数通过最小二乘法由观测资料求得。这样通过短波辐射 H_s 项将气溶胶光学厚度引入模式, 经繁杂的推导得到如下非线性微分方程组^[5]

$$\frac{d\theta}{dt} = k\theta \left[\sum_{i=0}^8 \psi_i \eta^i + \theta(\psi_9 \eta + \psi_{10}) \right] \quad (9)$$

$$\frac{d\eta}{dt} = k\eta \left[\sum_{i=0}^7 \varphi_i \eta^i + \varphi_8 \theta \right] \quad (10)$$

式中 $k\theta = 1/(C_w \rho_w D)$, $k\eta = \delta/(2\rho_i L_f)$, $\psi_i (i = 1, 2, \dots, 10)$ 和 $\varphi_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 是与物理常数、给定参数有关的系数, 详见文献[5]。海洋深度取自文献[1], $D = 4 \times 10^3$ m。式(9)右边 $\psi_0 \theta \eta$ 为海温与冰界交叉项, η^i 表示冰界 η 的 i 次方。可见式(9), (10) 表示 8 次方的非线性常微分方程组, 而原 Saltzman 模式仅为 6 次方。

4 有云反馈的模式

根据 Budyko 长波辐射实验式

$$I_{SB} = A + BT - (A_1 + B_1 T)n \quad (11)$$

根据卫星观测资料估计, $B_1 T$ 是小量, 故与文献[6]一样, 不予考虑, 即有

$$I_{SB} = A + BT - A_1 n \quad (12)$$

式中 A, B, A_1, B_1 均为经验常数, n 为云量, T 为海表温度(), 而灰体长波辐射公式为

$$I_s = \epsilon \sigma T_s^4 \quad (13)$$

式中 ϵ 为有效放射率, σ 是 Stefan-Boltzmann 常数, T_s 为地表温度(K)。

为了导出云量 n , 用地表温度 T_s 进行参数化的公式, 设 I_{SB} 与 I_s 相当, 即

$$I_{SB} = I_s \quad (14)$$

尽管在严格意义上 I_{SB} 与 I_s 并不相等, 但通过这样的假定, 可设定云量关于 T_s 的参数化表达式

$$n = a + bT_s - cT_s^4 \quad (15)$$

其中

$$a = (A - 273.16)/A_1, \quad b = B/A_1, \quad c = \epsilon \sigma / A_1 \quad (16)$$

与文献[1]一样,令海表温度 T_s 值随纬度 $\xi = \sin \varphi$ 和冰界的变化为

$$T_s = \tau_0 - a_s \frac{\xi^2}{\eta^2} \quad (17)$$

式中 $\tau_0 = 300 \text{ K}$, 为赤道处温度, $a_s = \tau_0 - \tau = 27 \text{ K}$, $\tau = 273 \text{ K}$, 为冰界处温度, 将式(17)代入式(15), 略去方程中的相对小量得

$$n = \lambda_4 + \lambda_2 T_s - \Delta\lambda \frac{\xi^4}{\eta^4} \quad (18)$$

根据钱建华^[6]的结果, 取 $A = 236.2$, $B = 1.41$, $A_1 = 31.4$, 经计算

$$\lambda_4 = -4.744 + 43.95\epsilon$$

$$\lambda_2 = 0.0449045 - 0.1951223\epsilon$$

$$\Delta\lambda = 0.7649\epsilon$$

在计算时, 取 $\epsilon = 0.635$, 式(18)就是模式中描述云反馈的公式, 表示云量 n 与温度 T_s 之间的非线性关系。因为根据式(17), 式(18)右边第三项相当于 T_s^2 项, 且其符号恒负, 这样使得云量 n 不致于随 T_s 无限制增大。

需要指出, 式(18)中的常定参数 λ_4 , λ_2 和 $\Delta\lambda$ 应根据云量和温度的观测资料, 通过最小二乘法求得, 这样会更符合于模式。但实测资料是“当前气候”条件下测得的, 当 CO_2 倍增时, 这些数据肯定已改变, 而实际上这是无法测到的。这也是所有温室效应数值模拟中, 包括 GCM 和 CGCM, 都会遇到的问题。由于文中模式简单, 对这些系数依赖性会更大些。根据式(18)参数化建立的模式, 对 CO_2 倍增试验的结果与各类气候模式的结果在总体上是相当一致的。

式(2)中 H_s 的表达式

$$H_s = (1 - n)H_{\text{de}} + nH_{\text{do}} \quad (19)$$

式中 H_{ck} 表示晴空时短波辐射地表通量, H_{do} 表示有云时的通量, 两者的参数化详见文献[3]。

通过推导, 得到了形式上与式(9), (10)相同的模式方程组(见附录式 B10a- b), 但其系数及所含参数已很不相同, 其中包含了云反馈过程。无云反馈的模式相当于在式(19)中取 n 为常正值, 通常取 $n = 0.5$, 以下简称无云与有云反馈模式为无云模式与有云模式。

5 二氧化碳过程参数化

就物理原理而言, CO_2 温室效应可在模式方程组中加进大气辐射传输方程来实现, 但这样就会增加物理变量和物理过程, 使模式进一步复杂化。所以通常在这样的低维模式中可通过参数化将 CO_2 的增温效应引入模式中。

海表向上长波辐射通量为

$$H_{\text{IR}} = \epsilon \sigma T_s^4 (1 - \epsilon^0)$$

式中 ϵ_s 是海表放射率, σ 是 Stefan-Boltzmann 常数, ϵ_0 为有效长波大气放射率, 它源于云层下的水汽、 CO_2 和 O_3 等。来自云的反辐射

$$H_{\text{IR}} = \epsilon_0 \sigma T_{\text{B}}^4 (1 - \epsilon_0)$$

式中 ϵ_0 是云放射, T_{B} 是云底温度, 设 $\epsilon_s = \epsilon_0 = 1.0$, 假定

$$T_{\text{B}}^4 = \beta_1 T_{\text{s}}^4$$

取 β_1 为 $0.50 \sim 0.80$ 。在云量 n 时地表净辐射通量为

$$\begin{aligned} H_{\text{IR}} &= \epsilon_s \sigma T_{\text{s}}^4 (1 - \epsilon_0) - n [\epsilon_0 \sigma T_{\text{s}}^4 \beta_1 (1 - \epsilon_0)] \\ &= \sigma (1 - \epsilon_0) (1 - \beta_1 n) T_{\text{s}}^4 \end{aligned} \quad (20)$$

ϵ_0 可表达成

$$\epsilon_0 = \epsilon + \epsilon_c + \epsilon^* - \epsilon^* \quad (21)$$

式中 ϵ 为水汽放射率, ϵ_c 为 CO_2 放射率, ϵ_s 为 O_3 氧放射率, 取 $\epsilon_c = 0.06$, ϵ^* 为水汽与 CO_2 带重合部分的放射率, $\epsilon^* = 0.12$, ϵ_c 参数化为

$$\epsilon_c = \epsilon_c^* + \beta_2 (T_{\text{s}} - T_{\text{so}}) \quad (22)$$

式中取 $\epsilon_c^* = 0.6415$, $\beta_2 = 0.00215$, $T_{\text{so}} = 286 \text{ K}$ 。 CO_2 的放射率取 Bryson 和 Dittberner 的关系

$$\epsilon_c = b_8 \ln [\text{CO}_2] + b_9$$

式中 $b_8 = 0.0235$, $b_9 = 0.0537$, $[\text{CO}_2]$ 表示大气中 CO_2 含量, 当 $[\text{CO}_2] = 330 \times 10^{-6}$ 时, $\epsilon_c = 0.190$ 。

这样通过海表长波辐射通量的表达式将 CO_2 的效应置入模式中。为了将 CO_2 的温室效应的正反馈过程表达出来, 与文献 [1] 相同设

$$\epsilon_c = \epsilon_c^* + b_{10} (\theta - \theta^*)$$

式中 θ^* 为平均温度, θ 为标准值, 令 $\theta^* = 278 \text{ K}$,

$$\epsilon_c^* = b_8 [\text{CO}_2] + b_9$$

b_{10} 可由观测资料确定, 为 $10^{-2} \sim 10^{-3}$

正反馈过程由 $\{\theta, [\text{CO}_2], \epsilon_c, \int_0^{\eta} H_{\text{IR}} dx, \theta\}$ 来表示。即 θ 增加, 使海冰溶解 CO_2 能力减弱, CO_2 输送给大气, 大气中的 CO_2 增加导致放射率 ϵ_c 增加。根据式 (21), ϵ_0 随之增加, 又据式 (20), 海表净辐射通量减少, 这样更多的热量留在海洋, 使得 θ 再度增加。

6 对二氧化碳温室效应的模拟与结果

首先用无云模式进行了积分计算。步长为 1 a , 当二氧化碳浓度从 330×10^{-6} 增加到 660×10^{-6} 时, 平均温度 θ 增加了 $\Delta\theta = 2.1$ 。图 1 给出了在 CO_2 浓度为 660×10^{-6} 时温度

θ 随时间的变化。给定初值 $\theta = 278 \text{ K}$, 开始温度急剧增加, 积分到 500 步达到最高值, 随后又降下来, 经若干小波动后趋于稳定。这时温度为 286.7 K 。而在 330×10^{-6} 时, 模式温度为 284.6 K , 故差值 $\Delta\theta = \theta_{660} - \theta_{330} = 2.1$ 。

含 330×10^{-6} 的模式计算稳定时冰界纬度 $\eta_{330} = 63.5 \text{ N}$, 而含 660×10^{-6} 的模式计算稳定时冰界纬度 $\eta_{660} = 73.7 \text{ N}$, 也就是说由于 CO_2 的温室效应, 当 CO_2 从 330×10^{-6} 增加到 660×10^{-6} 时, 冰界向极地撤退了 10.2° 。

随后用有云模式进行敏感性试验, 在平衡试验中, 当 CO_2 从 330×10^{-6} 增加到 660×10^{-6} 时, 模式温度增加了 $\Delta\theta_c = 1.7$ 。可见当 CO_2 倍增时用有云模式模拟得到的增温量低于无云模式的。这一结果与某些大气环流模式的结果一致。这些模式也是在没有云反馈和冰雪反馈时增温量大^[7,8]。但有云模式的增温量很大程度上依赖于云反馈参数化方案。

瞬间试验按 CO_2 每年增加 1% 来进行, 即

$$[\text{CO}_2]^{i+1} = [\text{CO}_2]^i + [\text{CO}_2]^i \times 1\%$$

给模式逐步增加 CO_2 浓度, 式中 i 表示积分步数。图 2 给出了温度随 CO_2 增加而发生的变化。

初始 CO_2 浓度为 330×10^{-6} , 最终 CO_2 浓度为 660×10^{-6} 。到 660×10^{-6} 后 CO_2 不再增加但继续进行计算, 直到温度不再增加趋于稳定时结束计算。最后得到 $\Delta\theta = \theta_{660} - \theta_{330} = 1.3$, 无云模式瞬变增温为 1.8 。对比 $\Delta\theta_c$ 与 $\Delta\theta$, 可见平衡试验的增温要大, 而瞬变试验的增温小, 这和海气耦合模式的模拟结果一致^[7,8]。世界上几个主要的海气耦合模式如 GFDL, NCAR, UKMO 和 MPI 的结果为, 瞬变试验时 CO_2 浓度以每年 1% 或 1.5% 增加, 则大气中 CO_2 浓度增加到两倍时 (60 ~ 70 a), 全球平均气温上升 $1.3 \sim 2.3$ 。而当 CO_2 倍增时, 这些模式平衡试验的全球增温值为 $2.0 \sim 4.5$ 。文中模式是低维耦合模式, 模拟的增温值普遍比 GCM 的小, 但和辐射对流模式 (RCM) 和能量平衡模式

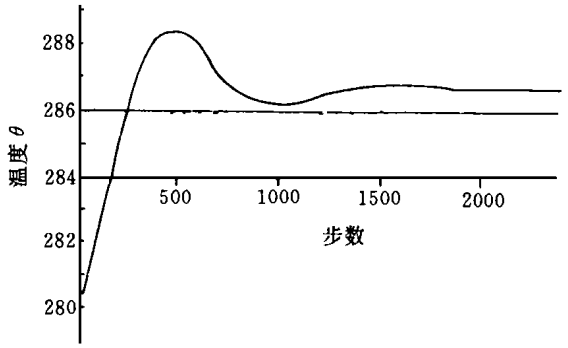


图 1 $[\text{CO}_2] = 660 \times 10^{-6}$ 时模式温度在积分过程中的变化 (温度 θ 单位为 K)

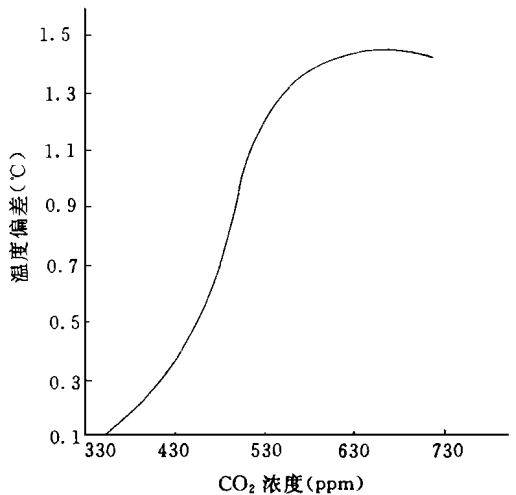


图 2 有云模式瞬变试验中 CO_2 所引起的温度变化

(EBM) 等低维模式模拟 CO_2 的 2 倍升温值相当一致。RCM 和 EBM 的升温值普遍比 GCM 或 CGCM 的要小^[9]。

考虑到地球气候史上曾出现过 CO_2 含量大于 1000×10^{-6} 的情况, 这里作了 $4 \times \text{CO}_2 = 1320 \times 10^{-6}$ 的试验, 其结果为:

平衡试验: 无云模式升温 3.4 ;

有云模式升温 2.5 ;

瞬变试验: 无云模式升温 2.8 ;

有云模式升温 1.8 。

其结果与 GCM 模拟也类似。

参考文献

- 1 Saltzman B, Moritz R E. A Time-dependent Climatic Feedback System Involving Sea-ice Extent, Ocean Temperature, and CO_2 . *Tellus*, 1980, 32: 93- 118
- 2 王勤学, 曹鸿兴. 大气-海洋-海冰的耦合气候模式及其非线性行为. 中国科协学会部编, 天地生综合研究进展. 北京: 中国科学技术出版社, 1989, 504pp
- 3 曹鸿兴. 气候动力模式及模拟. 北京: 气象出版社, 1994, 232 ~ 244
- 4 King M D. A Model of the Radiative Properties of the El Chichon Stratospheric Aerosol Layer. *J Climate and Appl Meteor*, 1984, 23: 1121 ~ 1136
- 5 王勤学. 一个理想气候反馈系统演化的数值模拟试验. 北京师范大学学报(自然科学版), 1990, 增刊 1: 87 ~ 95
- 6 钱建华. 纬向平均能量平衡模式中云量对气候的影响. 邹进上主编, 气候学研究, 么枕生从事气象和执教 50 周年专辑. 北京: 气象出版社, 1989, 225 ~ 234
- 7 Houghton J T, Callander B A, Varney S K. Climate change 1992. The Supplementary to The IPCC Scientific Assessment. Cambridge(U.K.) Cambridge University Press, 1992, 103- 104
- 8 赵宗慈. 模拟人类活动影响气候变化的新进展. 应用气象学报, 1993, 4(4): 468- 475
- 9 Cao H X, Mitchell J F B, Lavery J R. Simulated diurnal range and variability of surface temperature in a global climate model for present and doubled CO_2 climates. *J Climate*, 1992, 5(9): 920- 943

附录

模式数学原理

式(4)中各非绝热加热项的表达,参数化分别推导如下:

(1) 短波辐射 H_s

$$H_s = (1 - n)H_s(\text{cle}) + nH_s(\text{clo}) \quad (\text{A } 1)$$

式中 cle 表示晴空, clo 有云, n 为云量。

$$H_s(\text{cle}) = \mu_{\text{cle}}R \quad (\text{A } 2)$$

$$H_s(\text{clo}) = \mu_{\text{clo}}R \quad (\text{A } 3)$$

μ_{cle} 和 μ_{clo} 分别为无云和有云时的大气透射率,分别表达为

$$\begin{cases} \mu_{\text{cle}} = 1 - (X + \mathcal{Y}), & \mu_{\text{clo}} = 1 - (X + X_n + \mathcal{Y}_T + \mathcal{Y}_n + \mathcal{Y}_k) \\ X = X_d + X + X_k^*, & R = (1 - \mathcal{Y}_s)R_0(\xi) \end{cases} \quad (\text{A } 4)$$

式中 \mathcal{Y}_s 为地面反照率, $R_0(\xi)$ 为大气顶太阳入射辐射, X 为大气吸收率, X_d , X , X_k^* 分别为干洁大气、水汽和气溶胶吸收率, X_n 为云滴吸收率, \mathcal{Y}_T 为云上大气反射率, \mathcal{Y}_n 为云顶反射率, \mathcal{Y}_k^* 为气溶胶反向散射率, \mathcal{Y} 为无云大气反向散射率, 取 $\mathcal{Y} = 0.14$, X_k^* 和 \mathcal{Y}_k^* 取 King M D 的实验式, 即取两者为参考气溶胶光学厚度 τ_y 一次项、二次项以及纬度 ξ 的回归函数^[4]。

$$\mathcal{Y}_k^* = (0.3303\tau_y - 0.2462\tau_y^2) - (0.0154\tau_y - 0.0215\tau_y^2)\xi \quad (\text{A } 5)$$

$$X_k^* = (0.05130 + 0.00078\tau_y + 0.00124\tau_y^2) + (0.01040\tau_y - 0.01570\tau_y^2)\xi + 0.0680\xi^2 \quad (\text{A } 6)$$

式中 τ_y 为气溶胶光学厚度。

将 X_d , X_y , X_k , R 表示为纬度 ξ 的函数

$$X_d = X_d(0)p(\xi) \quad (\text{A } 7)$$

$$X_y = \alpha_1 + \alpha_2 T_s(\xi)p(\xi) \quad (\text{A } 8)$$

$$X_k = X_k^* p(\xi) \quad (\text{A } 9)$$

$$R(\xi) = R_0(1 + \alpha_3\xi + \alpha_4\xi^2) \quad (\text{A } 10)$$

式中 $p(\xi) = 1 + \alpha_5\xi + \alpha_6\xi^2 + \alpha_7\xi^3$, R_0 为赤道大气顶太阳入射辐射, $\alpha_1 = -0.8496$, $\alpha_2 = 0.00327 \text{ K}^{-1}$ 均为常数。

将式(A2 ~ A10)以及式(17)代入(A1)得

$$H_s = \left[1 - \mathcal{Y} - (\alpha_3(\xi) - \frac{\alpha_6 a_s \xi^2}{T^p} p(\xi) - u(\xi)n(T_s)) \right] R(\xi) \quad (\text{A } 11)$$

$$\begin{cases} \alpha_3(\xi) = \alpha_{30} + \alpha_{31}\xi + \alpha_{32}\xi^2 \\ u(\xi) = \alpha_{40} + \alpha_{41}\xi + \alpha_{42}\xi^2 \\ \alpha_{30} = \alpha_1 + \alpha_2 T_0 + X_d(0) + 0.051298 + 2.1234 \cdot 10^{-3}\tau_y + 1.62944 \cdot 10^{-3}\tau_y^2 \\ \alpha_{31} = 0.01042 - 0.0157\tau_y^2 \\ \alpha_{32} = 0.068 + 0.01376\tau_y - 0.0014369\tau_y^2 \\ \alpha_{40} = \alpha_1 - 0.14273\tau_y + 0.538622\tau_y^2 \\ \alpha_{41} = -0.0154\tau_y + 0.0215\tau_y^2 \\ \alpha_{42} = 0.040379\tau_y - 0.23499\tau_y^2 \end{cases} \quad (\text{A } 12)$$

式中 $\alpha_4 = X_n + \mathcal{Y}_T + \mathcal{Y}_n - \mathcal{Y}$ 。将式(18)和(A10), (A12)代入(A11)得

$$H_s = R_0 \sum_{i=0}^7 a_i \xi^i \quad (\text{A } 13)$$

式中系数

$$\left\{ \begin{array}{l}
 a_0 = 1 - \gamma - \alpha_{30} - \alpha_{40}(\lambda_4 + \lambda_2 \tau_0) \\
 a_1 = -\alpha_{31} - \alpha_{30}\alpha_7 - \alpha_{41}(\lambda_4 + \lambda_2 \tau_0) + \alpha_5 a_0 \\
 a_2 = -\alpha_{32} + \alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_7 - \alpha_{30}\alpha_8 - \alpha_{42}(\lambda_4 + \lambda_2 \tau_0) + \\
 \quad \alpha_{40}\lambda_2 a_s / \eta^2 + \alpha_5(-\alpha_{31} - \alpha_{30}\alpha_7 - \alpha_{41}\lambda_4 - \alpha_{41}\lambda_2 \tau_0) + \alpha_6 a_0 \\
 a_3 = -\alpha_{32}\alpha_7 + \alpha_7\alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_8 - \alpha_{30}\alpha_9 + \alpha_{41}\lambda_1 a_s / \eta^2 + \alpha_5(-\alpha_{32} + \alpha_2 a_s / \eta^2 - \\
 \quad \alpha_{31}\alpha_7 - \alpha_{30}\alpha_8 - \alpha_{42}\lambda_4 - \alpha_{42}\lambda_2 \tau_0 + \alpha_{40}\lambda_2 a_s / \eta^2) + \alpha_6(-\alpha_{31} - \alpha_{30}\alpha_7 - \alpha_{41}\lambda_4 - \alpha_{41}\lambda_2 \tau_0) \\
 a_4 = -\alpha_{32}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_9 + \alpha_{42}\lambda_2 a_s / \eta^2 + \\
 \quad \alpha_5(-\alpha_{32}\alpha_7 + \alpha_7\alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_8 - \alpha_{30}\alpha_9) + \Delta\lambda\eta^4 + \alpha_5\alpha_{41}\lambda_2 a_s / \eta^2 + \\
 \quad \alpha_6(-\alpha_{32} + \alpha_2 a_s / \eta^2 + \alpha_{40}\lambda_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_7 - \alpha_{30}\alpha_8 - \alpha_{42}\lambda_4 - \alpha_{42}\lambda_2 \tau_0) \\
 a_5 = -\alpha_{32}\alpha_9 + \alpha_9\alpha_2 a_s / \eta^2 + a_5(-\alpha_{32}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_9 - \alpha_{42}\lambda_2 a_s / \eta^2) + \\
 \quad \alpha_6(-\alpha_{32}\alpha_7 + \alpha_7\alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_8 - \alpha_{30}\alpha_9 + \alpha_{41}\lambda_2 a_s / \eta^2 + \alpha_5\Delta\lambda\eta^4) \\
 a_6 = \alpha_5(-\alpha_{32}\alpha_9 + \alpha_9\alpha_2 a_s / \eta^2) + \alpha_6(-\alpha_{32}\alpha_8 + \alpha_8\alpha_2 a_s / \eta^2 - \alpha_{31}\alpha_9 + \alpha_{42}\lambda_2 a_s / \eta^2) + \alpha_6\Delta\lambda\eta^4 \\
 a_7 = \alpha_6(-\alpha_{32}\alpha_9 + \alpha_9\alpha_2 a_s / \eta^2)
 \end{array} \right. \quad (\text{A } 14)$$

参数取

$$\begin{aligned}
 \lambda_{1i} &= 0.0470 & \alpha_3 &= \lambda_{1i} + \alpha_i + \alpha_2 \tau_0 = 0.1784 & \alpha_4 &= 0.3700 \\
 \alpha_5 &= 0.07779 & \alpha_6 &= -0.830 & \alpha_7 &= 1.0753 & \alpha_8 &= -3.7655 \\
 \alpha_9 &= 4.0526 \\
 \lambda_{1n} &= 0.04 & \gamma &= 0.04 & \gamma_T &= 0.05 & \gamma_n &= 0.42 \\
 T_s(0) &= \tau_0 = 300 \text{ K} & T_s(\eta) &= \tau_\eta = 273 \text{ K} & a_s &= \tau_0 - \tau_\eta = 27 \text{ K}
 \end{aligned}$$

(2) 长波辐射 H_{IR}

将式(21), (22)代入式(20)得

$$H_{\text{IR}} = \sigma(1 - \beta_{1n})(\beta_0 T_s^4 - \beta_2 T_s^5) \quad (\text{B1})$$

式中 $\beta_0 = \beta_3 - \epsilon$, $\beta_3 = 1 - \epsilon_s^* + \beta_2 T_s^* + \epsilon_s - \epsilon_z$; $\beta_0 = 0.8371$, $\beta_1 = 0.65$, $\beta_2 = 0.002125$.

对式(17)求4次、5次方, 去掉大于 ξ/η^4 次方的项, 得近似式

$$T_s^4 = \beta_4 + \beta_5 \xi^2 / \eta^2 + \beta_6 \xi^4 / \eta^4 \quad (\text{B2})$$

$$T_s^5 = \beta_7 + \beta_8 \xi^2 / \eta^2 + \beta_9 \xi^4 / \eta^4 \quad (\text{B3})$$

式中

$$\beta_4 = T_{s0}^3(6\tau_0^2 - 8T_{s0}\tau_0 + 3T_{s0}^2)$$

$$\beta_5 = a_s T_{s0}^2(8T_s - 12\tau_0)$$

$$\beta_6 = 6a_s^2 T_{s0}^2$$

$$\beta_7 = T_{s0}^3(10\tau_0^2 - 15T_{s0}\tau_0 + 6T_{s0}^2)$$

$$\beta_8 = a_s T_{s0}^3(15T_{s0} - 20\tau_0)$$

$$\beta_9 = 10a_s^2 T_{s0}^3 \quad T_{s0} = 286 \text{ K}$$

将式(18), (B2), (B3)代入式(B1)得

$$H_{\text{IR}} = b_0 + b_2 \xi^2 / \eta^2 + b_4 \xi^4 / \eta^4 + b_6 \xi^6 / \eta^6 + b_8 \xi^8 / \eta^8 \quad (\text{B4})$$

$$\text{其中} \begin{cases} b_0 = \sigma(1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)(\beta_4\beta_0 - \beta_2\beta_7) \\ b_2 = \sigma[(1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)(\beta_0\beta_5 - \beta_2\beta_8) + \beta_1\lambda_2\alpha_s(\beta_0\beta_4 - \beta_2\beta_7)] \\ b_4 = \sigma[(1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)(\beta_0\beta_6 - \beta_2\beta_9) + \beta_1\lambda_2\alpha_s(\beta_0\beta_5 - \beta_2\beta_8) - (\beta_0\beta_4 - \beta_2\beta_7)\beta_1\Delta\lambda] \\ b_6 = \sigma[\beta_1\lambda_2\alpha_s(\beta_0\beta_6 - \beta_2\beta_9) - (\beta_0\beta_5 - \beta_2\beta_8)\beta_1\Delta\lambda] \\ b_8 = -(\beta_0\beta_6 - \beta_2\beta_9)\beta_1\Delta\lambda \end{cases} \quad (\text{B5})$$

(3) 感热

$$H_{\text{SN}} = C_1 - C_2\xi^2/\eta^{\text{P}} + C_3(1 - \xi^2)\xi^2/\eta^{\text{P}} \quad (\text{B6})$$

表达式与文献[1]同,取 $C_1 = 5.2 \text{ W m}^{-2}$, $C_2 = 0.0 \text{ W m}^{-2}$, $C_3 = 21.6 \text{ W m}^{-2}$ 。

(4) 潜热

$$H_{\text{E}} = d_0 + d_1\xi^2/\eta^{\text{P}} + d_2\xi^4/\eta^{\text{P}} + d_3\xi^6/\eta^{\text{P}} + d_4\xi^8/\eta^{\text{P}} + d_5\xi^2/\eta^{\text{P}} + d_6\xi^4/\eta^{\text{P}} + d_7\xi^6/\eta^{\text{P}} \quad (\text{B7})$$

表达式与文献[1]相同,取 $d_0 = 119.58$, $d_1 = -101.40$, $d_2 = -85.09$, $d_3 = 122.93$, $d_4 = -33.24$, $d_5 = 66.35$, $d_6 = -84.58$, $d_7 = 33.24$, 单位均为 W m^{-2} 。

(5) 海冰上垂直热通量

$$H_{\text{I}} = v(\theta - \tau_0) \quad (\text{B8})$$

取 $v = 10 \text{ W m}^{-2}\text{K}^{-1}$, $\tau_0 = 273 \text{ K}$ 。

(6) 融冰垂直热通量取

$$H_{\text{M}} = 3 \text{ W m}^{-2} \quad (\text{B9})$$

将式(A13), (B4), (B6), (B7), (B8), (B9)代入式(4), 经运算后得包含云反馈的大气-海洋-海冰耦合模式, 关于冰界 η 的方程推导类似不再赘述。最后得模式方程组为

$$\frac{d\theta}{dt} = k_{\theta} \left(\sum_{i=0}^8 \psi_i \eta + \psi_9 \theta + \psi_{10} \theta \right) \quad (\text{B10a})$$

$$\frac{d\eta}{dt} = k_{\eta} \left(\sum_{i=0}^7 \varphi_i \eta + \varphi_8 \theta \right) \quad (\text{B10b})$$

式中系数 ψ_i, φ_i 由于表达式冗长, 凡与文献[5]附录中相同的不再列出, 若文献[5]中的与本文的略有差别, 用下式表示

$$X = \bar{X} + X_{\text{nd}}$$

X 为本文的表达式, \bar{X} 为文献[5]中的表达式, X_{nd} 为新增的项。文献[5]中的 $H_{\text{s}}^{(3)}$ 在本文中表为 H_{M} 。

$$A_{\psi_1} = \bar{A}_{\psi_1} + \Delta\mathcal{N}5$$

$$A_{\psi_2} = \bar{A}_{\psi_2} + \alpha_5\Delta\mathcal{N}6$$

$$A_{\psi_3} = \bar{A}_{\psi_3} + \alpha_6\Delta\mathcal{N}7$$

$$\frac{B_{\psi_1}}{\sigma} = (1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)[\beta_4(\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10}\theta^*) - \beta_2\beta_7] +$$

$$\frac{1}{3}\{[(1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)\beta_5 + \beta_1\beta_4\lambda_2\alpha_s](\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10}\theta^*) -$$

$$\beta_1\beta_2\beta_7\lambda_2\alpha_s - (1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)\beta_2\beta_8\} + \frac{1}{5}\{[(1 - \beta_1\lambda_4 -$$

$$\beta_1\lambda_2\tau_0)\beta_6 + \beta_1\beta_5\lambda_2\alpha_s](\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10}\theta^*) - \beta_1\beta_2\beta_8\lambda_2\alpha_s -$$

$$(1 - \beta_1\lambda_4 - \beta_1\lambda_2\tau_0)\beta_2\beta_9\} + \frac{1}{7}\{\beta_1\beta_6\lambda_2\alpha_s(\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10}\theta^*) -$$

$$\beta_2\beta_9\beta_1\lambda_2\alpha_s - [\beta_2\beta_8\beta_1 - \beta_1\beta_5\Delta\lambda(\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10}\theta^*)]\} - \frac{1}{9}[\beta_1\beta_2\beta_9 -$$

$$\beta_1 \beta_6 \Delta \lambda (\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10} \theta^*)] - \frac{1}{5} [\beta_1 \beta_2 \beta_7 - \beta_1 \beta_4 \Delta \lambda (\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10} \theta^*)]$$

$$B_{\psi_2} = -b_{10} \sigma [(1 - \beta_1 \lambda_4 - \beta_1 \lambda_2 \tau_0) \beta_4 + \frac{1}{3} [(1 - \beta_1 \lambda_4 - \beta_1 \lambda_2 \tau_0) \beta_5 +$$

$$\beta_1 \beta_4 \lambda_2 a_s] + \frac{1}{5} [(1 - \beta_1 \lambda_4 - \beta_1 \lambda_2 \tau_0) \beta_6 + \beta_1 \beta_5 \lambda_2 a_s -$$

$$\beta_1 \beta_4 \Delta \lambda] + \frac{1}{7} (\beta_1 \beta_6 \lambda_2 a_s - \beta_1 \beta_5 \Delta \lambda) - \frac{1}{9} \beta_1 \beta_6 \Delta \lambda]$$

$$A_{\varphi_0} = A_{\varphi} + \Delta \lambda$$

$$A_{\varphi_1} = A_{\varphi} + \alpha_6 \Delta \lambda$$

$$A_{\varphi_2} = A_{\varphi} + \alpha_6 \Delta \lambda$$

$$B_{\Phi_1} = -\sigma [1 - \beta_1 (\lambda_4 + \lambda_2 \tau_0 - \lambda_2 a_s)] b_{10} \tau \bar{h}$$

$$B_{\Phi_2} = \sigma [1 - \beta_1 (\lambda_4 + \lambda_2 \tau_0 - \lambda_2 a_s)] [\bar{h} (\beta_3 - \epsilon_c^* + b_{10} \theta^*) - \beta_2 \tau \bar{h}]$$

$$e_{\psi} = (c_3 + d_5) / 3 + d_6 / 5 + d_7 / 7$$

$$e_{\Phi} = c_3 + d_5 + d_6 + d_7$$

有些数学符号和推导请参阅文献[1]。