

涡旋边缘线的分形特征*

罗哲贤

(南京气象学院, 南京, 210044)

摘 要

非线性作用可以使初始时刻等值线光滑的圆形和椭圆形涡旋演化为边缘不光滑、面积大小不等的多个涡旋和涡块共存的复杂流型。这些涡旋和涡块的边缘线具有分形特征, 其数值与 Lovejoy 根据卫星云图和雷达探测资料求得的热带云块边缘线的分形结果较为接近。

关键词: 涡旋, 分形, 非线性作用。

1 引 言

20 世纪 80 年代初期, 法国气象学家 Lovejoy^[1] 根据卫星云图和雷达探测资料的计算结果, 认为热带云块的边缘线具有极为广阔的无标度区间, 其复杂结构可用分形描述。这个结果在自然科学领域被广泛引用, 并被认为是大自然的一个奇迹。尽管 Lovejoy^[1] 注意到, 进一步弄清这个观测事实的物理原因十分重要, 但是, 近十多年来, 与此有关的机制方面的研究结果尚未见发表。

鉴于直接研究云块复杂结构形成问题的困难性, 作为问题的简化, 这里首先分析涡旋外缘线复杂构形及其分形特征的问题。

热带云块的一种常见形状是螺旋云带。罗哲贤^[2, 3] 在模式大气中, 曾经得到过与螺旋云带相似的用相对涡度场描述的涡旋结构。文中将进一步指出, 非线性作用不仅可以激发出与螺旋云带相似的结构, 而且可以使云带状的结构拉伸、变形、断裂, 形成大小不一的多个涡旋或涡块共存的复杂流型。值得指出的是: 这些共存的涡旋或涡块的边缘线, 同样具有较广阔的无标度区间, 其复杂结构同样可以用分形描述。而且, 相应的分维数的计算结果与文献 [1] 较为接近。这样, 就从绝对涡度守恒的物理约束出发, 得到了与 Lovejoy 观测研究有类似之处的数值结果。

2 模式概述

取准地转正压涡度方程:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi + J(\Psi, \xi + f_{oh}/H) + \delta(\beta \frac{\partial \Psi}{\partial x}) = 0 \quad (1)$$

* 初稿时间: 1997 年 6 月 26 日; 修改稿时间: 1998 年 4 月 20 日。

资助课题: 国家自然科学基金(49575259)。

式中,除另行说明外, $\delta = 1$ 。地形面 $h(x, y)$ 取以下形式:

$$h(x, y) = \begin{cases} h_0 \sin \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \pi \sin \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \pi, & x_1 \leq x \leq x_2, y_1 \leq y \leq y_2 \\ 0 & \text{其余区域} \end{cases} \quad (2)$$

初始时刻流函数的分布由下式给出:

$$\Psi(x, y, 0) = \Psi_1(x, y, 0) + \Psi_2(x, y, 0) \quad (3)$$

其中, $\Psi_1(x, y, 0)$ 描述偶极子流型, $\Psi_2(x, y, 0)$ 描述台风环流。这里

$$\Psi_1(x, y, 0) = c \sin \theta \begin{cases} \frac{1}{k^2 c} \frac{J_1(kr)}{J_1(k)} - \left(1 + \frac{1}{k^2 c} \right) r, & r < r_0 \\ \frac{K_1(r/\frac{c}{s})}{K_1(1/\frac{c}{s})}, & r \geq r_0 \end{cases} \quad (4)$$

$\Psi_2(x, y, 0)$ 采用 $\xi_2(x, y, 0)$ 用泊松迭代数值求出, $\xi_2(x, y, 0)$ 由下式决定:

$$\xi_2(x, y, 0) = (2v_m/r_m) (1 - 0.5F(x, y)) \exp(1 - F(x, y)) \quad (5)$$

这里, $F(x, y) = \frac{(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2}{(sr_m)}$ 。

式(1), (2), (4), (5) 中参数 $f_0 = 2\Omega \sin \varphi$, Ω 为地球自转角速度, φ 为 β 平面中线处的纬度值, 令 $\varphi = 35^\circ \text{N}$ 。均质大气厚度 $H = 10 \text{ km}$ 。最大地形高度 $h_0 = 2 \text{ km}$ 。地形面中心的坐标为 (x_h, y_h) , 坐标原点为计算区域的左下角。 $x_h = 1200 \text{ km}$, $y_h = 1760 \text{ km}$ 。区间 $[x_1, x_2]$ 占据 1600 km , $[y_1, y_2]$ 占据 1067 km 。地形面呈东西向长轴、南北向短轴的椭圆形状。式(4) 中参数 c 为无地形时偶极子的东移速度, $c = 4.7 \text{ m/s}$ 。 $\theta = \text{tg}^{-1}((y - y_d)/(x - x_d))$, (x_d, y_d) 为初始时刻偶极子中心的坐标。 $x_d = 960 \text{ km}$, $y_d = 2000 \text{ km}$ 。 $r =$

$\frac{(x - x_d)^2 + (y - y_d)^2}{k}$ 为 $r < r_0$ 区域内的波数, 令 $k = 3.9226$; r_0 为涡旋对的半径, $r_0 = 500 \text{ km}$ 。 J_1, K_1 分别为第一类 Bessel 函数和第二类变型 Bessel 函数。式(5) 中参数 v_m 为涡旋初始时刻最大风速, r_m 为涡旋中心至最大风速处的距离。 (x_c, y_c) 为初始时刻台风涡旋中心的坐标, $x_c = 2293 \text{ km}$, $y_c = 1440 \text{ km}$ 。 s 为非对称参数, 在台风环流的第 1, 2, 3, 4 象限, s 分别等于 1.1, 1.0, 0.9, 1.0。令 $v_m = 10 \text{ m/s}$, $r_m = 100 \text{ km}$ 。随着积分时间的增加, 台风最大风速逐渐增大。

侧边界取循环条件。在南北边界, 令流函数为零。

用差分方案求式(1)的数值解。计算区域为 $4000 \text{ km} \times 4000 \text{ km}$, 格距 $\Delta x = \Delta y = 26.667 \text{ km}$, 计 151×151 个格点 (I, J) ($I = 1, 2, \dots, 151$; $J = 1, 2, \dots, 151$)。 I 从西向东, J 从南向北依次增大。时间步长为 10 min 。

文中设计了两个试验。

试验 1 用式(1) ($\delta = 1$) 积分 12 个模式日。地形面及初始条件由式(2) — (5) 确定。

试验 2 中, 地形面及初始条件与试验 1 相同, 积分时间也是 12 个模式日。试验 2 与试验 1 的不同之处在于: 试验 1 在整个 288 个模式小时的积分过程中, 模式方程均用式

(1) ($\delta = 1$)。试验 2 在第 60 个模式小时以前, 模式方程用式(1) ($\delta = 1$), 但在第(60 ~ 288) 个模式小时的积分过程中, 模式方程用式(1) ($\delta = 0$), 即不包含 β 项的作用。之所以设计试验 2 的原因是, 在 Lovejoy^[1] 的工作中, 热带云块面积的变化范围为(1.0 ~ 1 200 000.0) km^2 , 它们具有相同的分形结构。这意味着, 在这个分形结构的形成过程中, 科氏力场的作用可能不是根本性的。为了证实这一点, 需要数值计算。之所以从第 60 个模式小时起略去 β 项的作用, 其原因是, 初始时刻涡旋边缘等值线均是光滑的, 直至到第 60 个模式小时, 涡旋边缘开始变得不光滑。

3 涡旋、螺旋云带和涡块共存的现象

3.1 粗粒化的分析方法

图 1a 是试验 1 和试验 2 的初始场。偶极子的北边为气旋涡旋, 南边为反气旋涡旋。台风涡旋位于偶极子的东南方。 $\xi = 2.0$ 的等值线代表了偶极子气旋涡旋和台风涡旋的边缘线(ξ 为相对涡度的无量纲量, $\xi = 1$ 相应于相对涡度的有量纲量为 $0.9375 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$)。图 1a 的图形是一般数值试验的输出图形, 可视为“细粒化”描述。

考虑到文中分析的重点是涡旋或涡块边缘线的分形结构, 故不用细粒化而用粗粒化的分析方法。即在输出图形时, 不计涡旋内部等值线分布的细节, 只给出涡旋的边缘线(以 $\xi = 2.0$ 描述)。与图 1a 相应的粗粒变化图形列于图 1b。图 1b 上, 只给出了两个气旋涡旋的边缘线。这里, 没有列出反气旋涡旋的边缘线。原因在于: 云系主要与气旋涡旋如台风等联系密切, 与反气旋涡旋的关系似乎不太密切。

这里将追踪图 1b 所示边缘线的形状是如何随时间演化的, 而不去考虑台风中心强度或非对称结构如何随时间变化等与分形无直接关系的种种其它问题。下面均以 $\xi = 2.0$ 等值线代表边缘线。这种粗粒化描述可使重点突出, 图形显示清晰、直观。

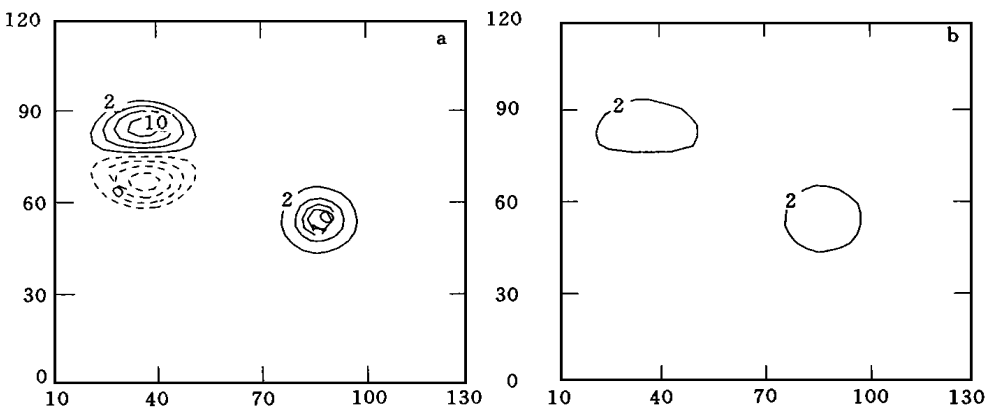


图 1 试验 1, 2 中相对涡度的初始场

(a. 细粒化图形; b. 粗粒化图形。图中数字为相对涡度的无量纲量。图框范围 $3200 \text{ km} \times 3200 \text{ km}$, 图框数字为格点号)

3.2 边缘线演化的 3 个阶段

在 12 个模式日的积分过程中, 每隔 12 h 输出一张气旋性涡旋的边缘线。边缘线随时

间演化可分为 3 个阶段。

第一阶段(0~第 36 小时)。台风涡旋基本维持圆形,偶极子气旋涡旋基本维持椭圆。众所周知,圆形或椭圆形的边缘线的维数等于 1。从第 24 小时起,在台风涡旋的西南方出现一个面积较小的涡旋或涡块,这主要归因于能量频散作用(图 2a)。

第二阶段(第 48~60 小时)。在两个气旋涡旋相互接近的过程中,它们的外缘线均被拉伸。能量频散生成涡旋的拉伸现象更加明显。同时,偶极子气旋涡旋的外缘线开始变得不太光滑(图 2b)。

第三阶段(第 72~288 小时)。在第 72 小时,两个气旋涡旋的外缘线合并。这个阶段的特征是:(1) 涡旋外缘线不光滑。(2) 出现与螺旋云带相似的结构。(3) 面积不等的多个涡旋或涡块共存(图 2c, 2d)。

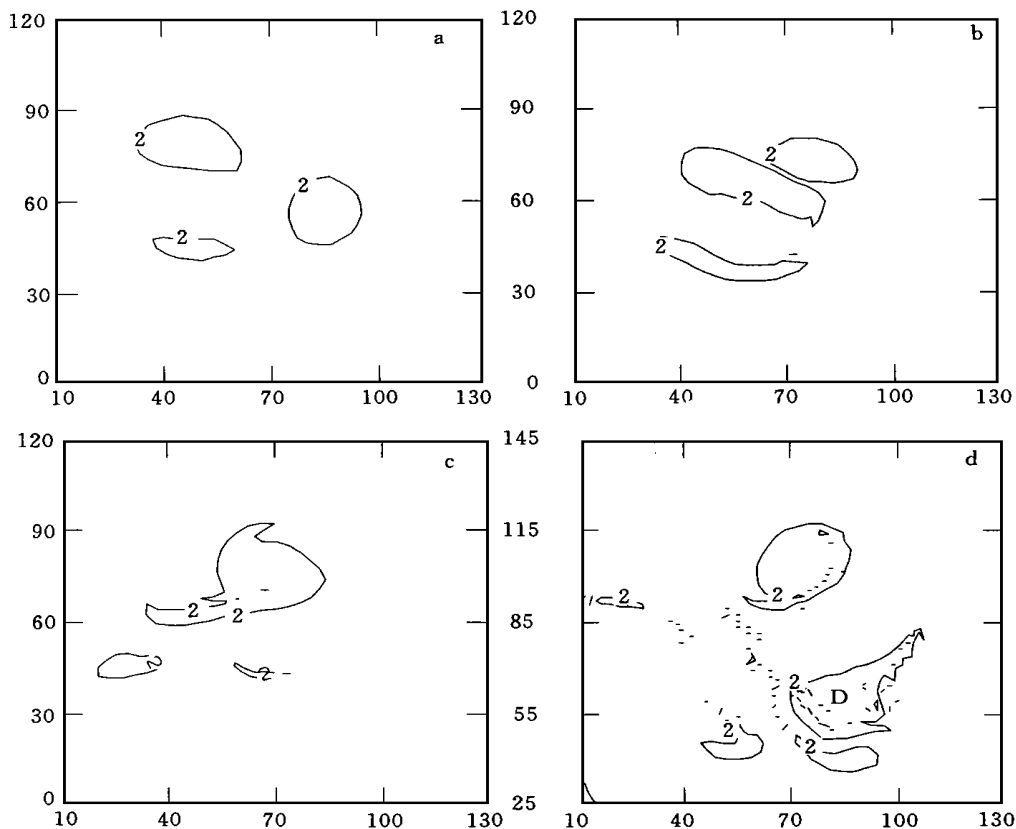


图 2 试验 1 中涡旋和涡块外缘线的分布

(a. 第 24 小时; b. 第 60 小时; c. 第 84 小时; d. 第 228 小时。图中数字为相对涡度的无量纲量,其余说明同图 1)

试验 1 中,每隔 12 h 输出 1 张外缘线分布图。在第 72~288 小时时段内,计 19 张分布图。在这 19 张图上,总计有 64 个涡旋或涡块。

4 外缘线的分维特征

由图 2d 可见, 涡旋的边缘线与圆形或椭圆形的规则形态相差很远。对圆形或椭圆形而言, 周长与面积之间通过下式建立联系: $p \sim \overline{A}^{-D}$ 。这里, p 为圆或椭圆外缘线即周长的长度, A 为面积, D 为外缘线的维数, 并且 $D = 1$ 。面积的维数 $D_2 = D + 1$, 即二维图形。对于不光滑不规则的形态而言, 边缘线周长与所围面积之间仍然服从关系式 $p \sim \overline{A}^{-D}$, 只是 $D > 1$ 。Lovejoy^[1]通过卫星云图资料和雷达探测资料, 得到 77 个不同大小的云块, 测得它们的周长和面积, 求出 D 在 1.35 左右。

4.1 有频散过程的分维结果

试验 1 中, 自始至终均存在频散作用。如上所述, 在试验 1 第三阶段, 计输出 19 张外缘线分布图, 总计有 64 个边缘不光滑的涡旋或涡块。这些中间输出的涡旋或涡块的外缘线是计算分维的基础资料。具体计算步骤如下:

第一, 用数格子法^[4]测量每个涡旋或涡块的面积 A 。

第二, 用两脚规法^[4]测量每个涡旋或涡块外缘线的长度 p 。

第三, 对每个涡旋或涡块, 用 A 求出 $\ln \overline{A}$, 用 p 求出 $\ln p$ 。这样, 总计得到 64 组 $(\ln \overline{A}, \ln p)$ 的数据。

第四, 以 $\ln \overline{A}$ 为横坐标, $\ln p$ 为纵坐标, 则一组 $(\ln \overline{A}, \ln p)$ 的数据就决定了该坐标平面上的一个点, 共得到 64 个离散点(见图 3)。

第五, 用最小二乘法拟合这些点的分布, 结果如图 3 上实线所示。该实线的斜率近

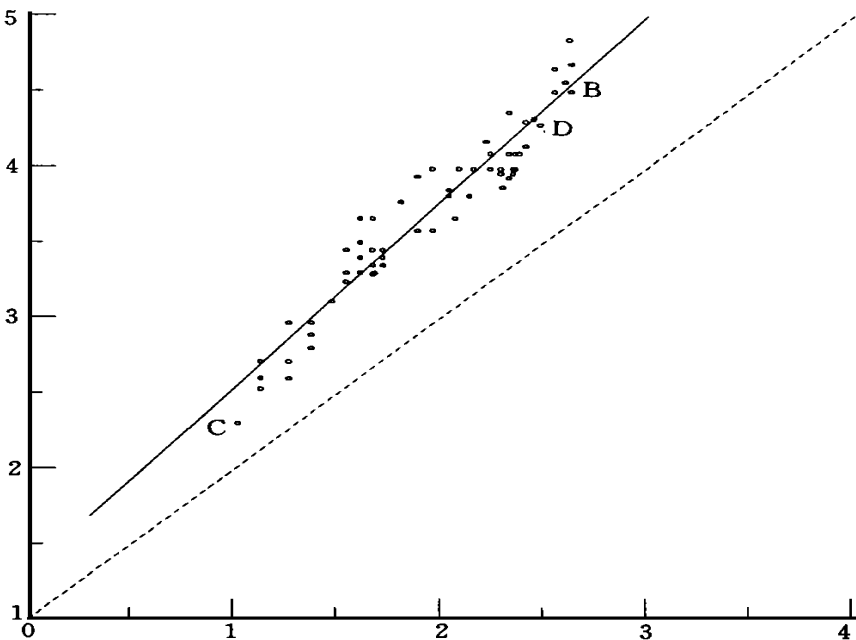


图 3 试验 1 中 $\ln \overline{A} \sim \ln p$ 的拟合线

(横坐标为 $\ln \overline{A}$, 纵坐标为 $\ln p$ 。实线最小二乘法拟合线, 虚线代表 $D = 1$)

似描述了这些涡旋和涡块外缘线的分维数。这里, $D = 1.23$; $\ln \bar{A}$ 和 $\ln p$ 之间的相关系数为 0.959。

现以图 2d 中涡旋 D 为例进一步说明。

首先用边长为 2 mm 的小正方形格子将涡旋 D 进行划分(边缘线分布图为正方形图框, 图框边长为 64.0 mm)。为便于数格子, 将涡旋 D 外缘线包围的区域用红色涂满, 用数格子方法估算涡旋 D 的面积 A 。结果: 涡旋 D 外缘线围成的区域计有 36.5 个格子, 相应于 $A = 146.0 \text{ mm}^2$ 。其次, 用脚距为 3 mm 的两脚规测量涡旋 D 外缘线的周长 p , 得 72.0 mm。由 A, p 求出 $\ln \bar{A} = 2.49, \ln p = 4.28$ 。在 $\ln \bar{A}$ 为横坐标, $\ln p$ 为纵坐标的图 3 上, 这一组 $(\ln \bar{A}, \ln p)$ 的值决定了该坐标平面上的一个点, 该点用 D 表示(图 3)。

试验 1, 64 个涡旋或涡块中, 最大的涡旋, 面积 $A = 192.5 \text{ mm}^2$, 周长 $p = 90.0 \text{ mm}$, 相应的坐标点 $(\ln \bar{A}, \ln p)$ 如图 3 上点 B 所示。最小的涡旋, 面积 $A = 7.50 \text{ mm}^2$, 周长 $p = 9.95 \text{ mm}$, 相应的坐标点如图 3 上点 C 所示。正如文献[4]所述, 数格子方法往往精度还不够高, 因此, 这里的计算结果是初步的。

4.2 无频散过程的分维结果

试验 2 中, 在第 60 模式小时以前, 存在频散作用。从第 60 模式小时起, 无频散作用, 仅存在非线性作用, 包括单个涡旋的相对涡度平流和不同涡旋之间的非线性作用。

类似地, 试验 2 中, 外缘线的演化也分为上述 3 个阶段。第三阶段(72~288 h)中, 计有 51 个外缘线不光滑的涡旋或涡块。面积最大的涡旋, $A = 281.5 \text{ mm}^2, p = 167.5 \text{ mm}$,

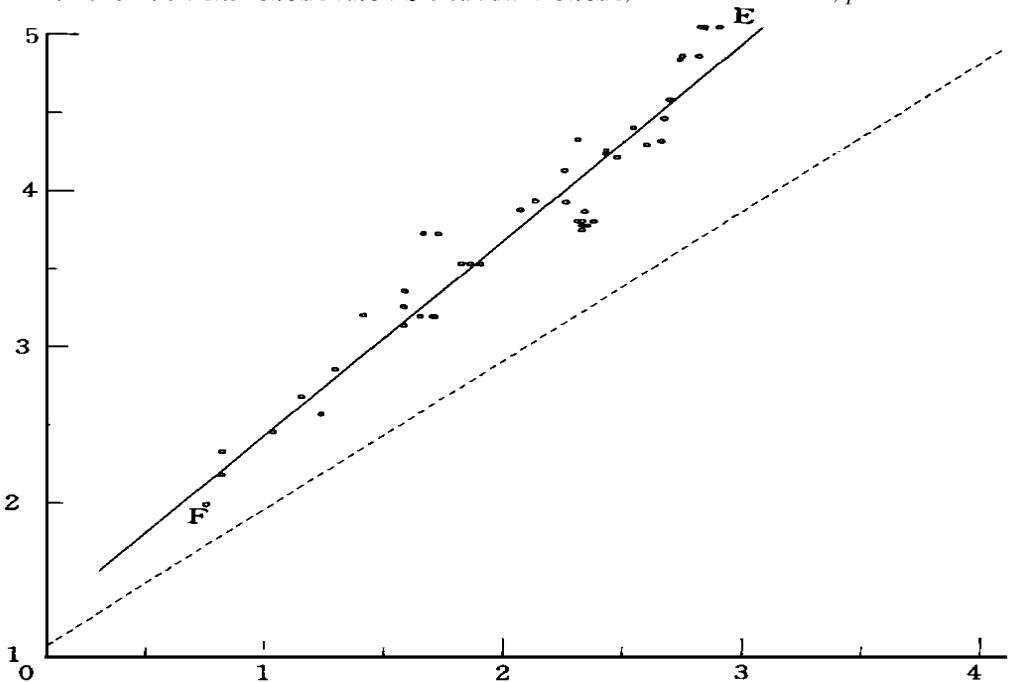


图 4 试验 2 中 $\ln \bar{A} \sim \ln p$ 的拟合线

(说明同图 3)

坐标点 $(\ln \bar{A}, \ln p)$ 如图 4 上点 E 所示;面积最小的涡块, $A = 4.40 \text{ mm}^2$, $p = 7.50 \text{ mm}$, 相应坐标点如图 4 上点 F 所示。根据 51 个涡旋或涡块外缘线围成的面积和周长的测量结果, 可在图 4 上点出 51 个离散点 $(\ln \bar{A}, \ln p)_i (i = 1, 2, \dots, 51)$ 。用最小二乘法拟合这些点, 得到图 4 上的实线, 该实线的斜率等于 1.32。这是无频散过程外缘线分维数的计算结果。 $\ln \bar{A}$ 和 $\ln p$ 的相关系数等于 0.964。

概括而言, 第一, 涡旋或涡块外缘线具有比较广的无标度区间。第二, 外缘线的分维数在 1.23 ~ 1.32 附近, 这个结果与 Lovejoy^[1]关于热带云块的诊断结果比较一致。第三, 地球旋转力场的作用似乎使外缘线的复杂性稍有降低。形成外缘线复杂性的根本原因在于非线性的相互作用。

5 结果和讨论

长期以来, 数学和物理学广泛研究了光滑、规则类函数。对于不够光滑, 不够规则的函数, 往往不去仔细研究。这种思维习惯在大气科学也有反映。如在大气科学领域已经积累了不少十分有意义的观测事实, 流型低频振荡, 副热带高压季节性北跳等。这些观测事实涉及的都是空间规则构型的演变规律。

近十多年来, 人们逐渐意识到: 不规则函数类比起光滑、规则函数类和经典的规则几何图形, 往往能更好地描述自然现象。分形几何为研究这些不规则函数类提供了一个框架。这是思维习惯富有特征的一个变化。这个思维习惯的变化在大气科学领域内也有反映。一个典型的例子是 Lovejoy^[1]的工作。文献[1]受到自然科学界的广泛重视, 也理应受到大气科学界的重视。因为, 这里涉及的, 是边缘不光滑, 不规则的空间复杂构型的内在规律。这方面工作的扩展和深入, 有可能促进大气动力学一个新的领域的进展。

与 Lovejoy 结果有关的机制研究, 目前尚未见到。文中对此尝试性地做了初步研究。结果表明, 非线性作用可以使初始时刻光滑规则的涡旋演化为边缘线不光滑的, 面积大小不等的多个涡旋、涡块共存的复杂流型。这些外缘线具有分形结构, 其分维数与 Lovejoy 观测结果较为一致。

非规则构型的时间演化问题十分复杂, 本文仅做了一点初步的工作。在非线性系统的研究中, 人们关心的是系统的终态^[5]。文中涡旋相互作用过程的终态是什么还不清楚。另一个缺陷是, 文献[1]的资料是在球面上获取的, 文中模式不包含球面性。此外, 测量涡旋面积的数格子法, 如文献[4]所述, 其精度往往不够高。这些问题均需继续研究。

参考文献

- 1 Lovejoy S. Area-perimeter relation for rain and cloud areas. *Science*, 1982, 216: 185-197
- 2 罗哲贤. 大尺度涡旋的正压不稳定. *气象学报*, 1995, 53(3): 281-288
- 3 罗哲贤. 涡旋规则分布与非规则分布的转换. *气象学报*, 1998, 56(6): 654-664
- 4 汪富泉, 李后强. 分形. 济南: 山东教育出版社, 1996. 236pp
- 5 周秀骥. 21 世纪的大气科学——纪念中国气象学会成立 70 周年. *气象学报*, 1994, 52(3): 257-260

FRACTALS OF VORTEX AND EDDY PERIMETERS

Lou Zhexian

(*Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing, 210044*)

Abstract

Nonlinear interaction can make a translation from the initial circular and elliptical vortices with smooth contours to complex flow patterns in which various scales vortices and eddies with unsmooth contours coexist. The perimeters of the vortices and eddies are characterized as fractals, the fractal dimensions are close to that obtained by Lovejoy based on the geometry of satellite and radar determined cloud and rain areas in the tropical regions.

Key words: Vortices, Fractals, Nonlinear interaction.