

# 冰雹谱分布及 $Z_e-E$ 关系的初步分析\*

牛生杰 马 磊 翟 涛

(宁夏气象科学研究所, 银川, 750002)

## 摘 要

文中分析了大量的地面雹谱资料, 给出了雹谱的平均特征及其三种类型。计算了冰雹落地动能通量, 并建立了  $Z_e-E$  关系, 其相关系数大于 0.96, 显著性水平小于 0.01。该项研究可为由地面测雹板网与雷达联合评估人工防雹效果等工作奠定基础。

关键词: 雹谱, 冰雹动能通量,  $Z_e-E$  关系。

## 1 引 言

冰雹是宁夏南部山区主要的气象灾害之一。该地区年平均降雹日数达 33.7 次, 平均年受灾面积达 24047  $\text{hm}^2$ , 最长达 72933  $\text{hm}^2$ 。20 世纪 70 年代中期以来, 每年进行“三七”高炮防雹作业, 取得了明显的社会 and 经济效益, 积累了较丰富的资料。但如何建立优化作业技术方法, 科学地评估防雹效果, 仍是没有很好解决的课题。为此, 自 1987 年至 1991 年, 在固原地区布设测雹板网, 收集了大量的地面雹谱资料, 同时收集了雷达探测冰雹云的资料, 对这些资料的分析研究, 取得了一定进展。

Waldvogel 等<sup>[1,2]</sup>由地面测雹板网获取的雹谱资料, 计算分析冰雹的落地动能通量和雷达反射率因子, 并建立二者之间的相关关系, 由数字化雷达资料来检验, 从而由雷达观测资料来计算冰雹落地动能通量, 客观地评估雹灾损失。这一工作还可用于人工防雹的效果评估, 为保险公司提供客观的雹灾资料, 也可校验冰雹现时预报模式的准确性, 优化人工防雹作业方案, 具有较大的应用前景。Waldvogel 等人是利用 10 cm 雷达探测分析和建立  $Z_e-E$  关系。中国由于 10 cm 雷达不普及, 投入气象业务使用的多为波长 5.6 cm 和 3.2 cm 天气雷达, 为此, 这里利用已收集到的雹谱资料和波长为 3.2 cm 雷达观测资料, 建立合适的  $Z_e-E$  关系, 对固原地区雹谱、 $Z_e-E$  关系做了初步探讨。

## 2 资料收集

### 2.1 资料收集

1987~1990 年, 在固原地区布设测雹点 29 个, 组成测雹板网, 覆盖面积约 1169  $\text{km}^2$ , 测板网布设密度约为 1 个/40  $\text{km}^2$ 。4 a 共获得 22 个冰雹过程的 62 份雹谱资料。测雹板采用在泡沫塑料上覆盖铝箔, 用撞击法取样, 取样面积 0.0546  $\text{m}^2$  即 0.23 m  $\times$  0.23 m, 测

\* 初稿时间: 1997 年 3 月 11 日; 修改稿时间: 1998 年 1 月 13 日。

雹板放在距地面 0.5 m 高的钢筋三角架上, 收集冰雹。降雹基本上发生在午后 14~22 时, 取样以铝箔上充满冰雹痕迹可辨为原则, 由于降雹过程中冰雹的密度差异较大, 取样时间一般为几分钟到十几分钟, 对大多数冰雹过程, 同时有几个点收集到了雹谱, 但每个点仅收集到 1~2 份, 对有些降雹过程, 测雹点收集到的是整个降雹过程的雹谱。每片铝箔上的冰雹个数大多为  $10^1$  量级, 即几十个, 少数情况达 100 多个, 最多达 200 个。表中所列云底温度, 是利用位于固原地区东部 30 km 的平凉站 08 时探空资料计算得出, 抬升凝结高度为云底高度, 详细情况见表 1。

表 1 雹谱收集一览表

降雹日期	降 雹 地 点	取样时间	雹谱 份数	每片铝箔平 均冰雹个数	冰雹最大 直径(mm)	云底温度 ( )	云底高度 (km)
1987. 7. 12	六盘山	18: 35 ~ 18: 43	2	42	17	4. 2	1. 0
1987. 7. 14	惠台、泾源、泾光	18: 00 ~ 18: 26	7	37	21	7. 0	0. 8
1987. 7. 15	惠台	18: 37 ~ 18: 40	1	49	21	12. 0	0. 5
1987. 7. 24	六盘山、杨河、沙塘、 隆德、西吉、硝河、白崖	17: 14 ~ 21: 15	9	91	23	1. 4	1. 0
1987. 7. 26	开城	16: 07 ~ 16: 15	1	13	17	12. 8	0. 5
1987. 7. 29	十八里	19: 30 ~ 19: 32	1	22	15	7. 5	0. 8
1987. 8. 10	六盘山、隆德、陈靳、 泾光、山河	14: 25 ~ 16: 40	7	15	17	8. 7	0. 6
1987. 8. 11	泾源、泾光、张易、河川	14: 57 ~ 18: 25	5	41	19	8. 0	0. 7
1987. 8. 13	河川、张易、白崖	18: 21 ~ 22: 22	4	38	21	8. 5	0. 5
1987. 8. 16	张易	18: 28 ~ 22: 06	2	55	17	3. 7	0. 9
1987. 8. 23	固原	16: 05 ~ 16: 16	2	80	15	11. 2	0. 5
1987. 8. 28	惠台	20: 30 ~ 20: 33	1	114	25	9. 0	0. 7
1987. 8. 30	泾源	14: 08 ~ 14: 12	1	78	25	- 1. 5	1. 3
1987. 9. 8	下寺	16: 12 ~ 16: 18	1	27	19	7. 0	0. 4
1988. 6. 22	隆德	20: 48 ~ 20: 49	1	68	23	6. 5	0. 7
1988. 6. 24	彭堡	16: 25 ~ 16: 30	1	50	25	6. 6	1. 0
1988. 6. 27	彭堡、开城	17: 00 ~ 18: 17	2	61	21	14. 0	0. 3
1988. 7. 12	下寺、沙南 大湾	14: 00 ~ 15: 50 15: 59 ~ 17: 58	4	105	17	12. 5	0. 4
1988. 7. 13	沙南、下寺 泾源	16: 10 ~ 16: 20 19: 25 ~ 19: 50	5	70	27	13. 5	0. 4
1988. 7. 21	泾源、六盘山	17: 48 ~ 18: 25	4	85	21	15. 5	0. 5
1989. 9. 20	硝河	17: 50 ~ 18: 10	2	201	17	9. 0	0. 2
1990. 6. 5	黄花	18: 35 ~ 18: 38	1	193	21	0. 8	0. 9

## 2. 2 检定曲线的制作

由铝箔上读取冰雹痕迹的大小, 直径间隔 2 mm, 查鉴定曲线得出冰雹的实际直径,

分档统计其冰雹个数, 构成雹谱。鉴定曲线的制作<sup>[3]</sup>采用不同直径的钢球模拟相应直径的落地冰雹, 建立不同钢球的直径与其在测雹板上的降落痕径之间的关系, 其原理是某一尺度冰雹与同体积钢球的落地动能相等, 并通过调整测雹板的水平夹角模拟风速对下落冰雹的影响, 其计算公式如下:

$$\frac{1}{2}m_i V_i^2 = \frac{1}{2}m V^2 = mgH \quad (1)$$

式中:  $m_i, V_i$  分别为冰雹质量及末速度,  $m, V$  分别为钢球的质量及下落末速度,  $H$  为钢球的下抛高度,  $g$  为重力加速度。由式(1)可得:

$$H = \frac{\pi D_i^3 \rho_i V_i^2}{12mg} \quad (2)$$

式中  $D_i$  为冰雹直径,  $\rho_i$  为冰雹密度, 冰雹末速度为:

$$V_i = \left( \frac{4\rho_i g D_i}{3\rho_a C_{D_i}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

式中  $\rho_a$  为空气密度,  $C_{D_i}$  为阻力系数, 由式(2), (3)可得:

$$H = \frac{\pi \rho_i^2 D_i^4}{9\rho_a C_{D_i} m}$$

$$\text{令 } K = \frac{\pi \rho_i^2}{9\rho_a C_{D_i}}$$

$$H = \frac{K D_i^4}{m} \quad (4)$$

其中取  $\rho_i = 890 \text{ kg/m}^3$ ,  $C_{D_i} = 0.5$ ,  $\rho_a = 0.9 \text{ kg/m}^3$ 。则

$$K = 6.144 \times 10^5 \text{ kg/m}^3$$

由式(4)可以求出不同直径的冰雹所对应的钢球下抛高度即距测雹板高度。

通过调整测雹板的水平角度模拟风对冰雹下落的影响, 设测雹板水平夹角为  $\alpha$ , 有:

$$\text{tg } \alpha = \frac{V_{\text{风}}}{V} = \frac{V_{\text{风}}}{2gH} \quad (5)$$

式中  $V_{\text{风}}$  为风速,  $V$  为  $H$  高度下抛钢球的末速度。由式(5)可得

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left( \frac{V_{\text{风}}}{2gH} \right) \quad (6)$$

鉴定曲线见图 1, 其中  $D$  为钢球痕径,  $D_i$  为冰雹直径, 单位为 mm。

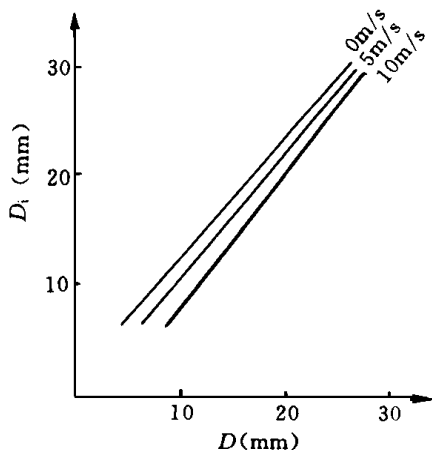


图 1 雹谱鉴定曲线

### 3 霰谱分布类型及分析

#### 3.1 平均谱

由 22 个冰雹天气过程收集到 62 份霰谱资料, 由此计算出平均谱(图 2)。平均谱基本上呈单调下降型。由指数谱分布来拟合, 平均谱可用下式来表示:

$$N(D_i) = N_0 \exp(-0.599D_i)$$

式中  $N_0 = 9.182$  个/( $\text{m}^3 \cdot \text{mm}$ ), 相关系数为 0.91, 显著性水平小于 0.01。

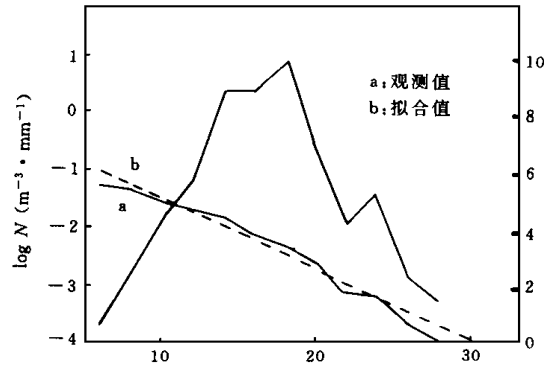


图 2 62 份霰谱的平均谱及动能通量平均谱

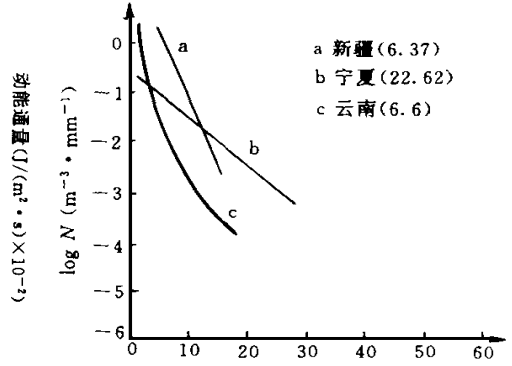


图 3 宁夏冰雹平均谱与两省区冰雹平均谱(括号内第 1 个数字为降雪过程数, 第 2 个数字为霰谱份数。上图见文献[4])

由图 3 可知, 云南霰谱(弱单体)浓度高, 谱窄, 斜率大; 宁夏霰谱较新疆霰谱谱宽, 浓度低, 斜率小。表 2 给出了国内外冰雹平均谱的谱参数分布。

表 2 国内外冰雹平均谱参数比较

地名或作者名	$N_0$ (个/( $\text{m}^3 \cdot \text{mm}$ ))		$\lambda$ ( $\text{mm}^{-1}$ ) 或 $b$		冰雹过程数	冰雹份数	雹暴类型
	平均值	变化范围	平均值	变化范围			
宁夏	9.075	0.0002 ~ 134.931	0.288	0.106 ~ 0.867	22	62	弱单体、多单体
新疆( $D_i \leq 6 \text{ mm}$ )	124.4		0.68		6	37	弱单体、多单体
Federer and Waldvogel	12.1	1.5 ~ 52	0.42	0.33 ~ 0.64			多单体
Smith				0.27 ~ 0.84			
云南	220.0	0.25 ~ 61	4.8		6	6	弱单体
Auer (1 $D_i \leq 50$ mm)	561.3		3.4				

表 2 中所列资料, 除了云南霰谱和 Auer 给出的美国 Laramie 霰谱服从幂指数分布  $N = N_0 D_i^{-b}$  外, 其它霰谱均服从指数分布  $N = N_0 \exp(-\lambda D_i)$ 。

#### 3.2 霰谱形态学分类

62 份霰谱呈现了 3 种分布形式, 即单峰型 24 份, 占 38.7%, 单调下降型 26 份, 占 41.9%, 双峰型 12 份, 占 19.4%。单峰谱峰值直径平均为 9.5 mm, 双峰谱第 1 峰值直径平均为 11.5 mm, 第 2 峰值平均直径为 16.7 mm。图 4 给出了冰雹谱的典型分布, 表 3 给

出了各类雹谱的各种平均直径及其变化范围和方差。由表中可以看出, 对于单调下降型、单峰型及双峰型 3 类雹谱, 其各类平均直径的大小是递增的。

表 3 各类雹谱的各种平均直径变化范围和方差

单位: mm

谱 型	平均直径 变化范围 方差	均方根直径 变化范围 方差	均立方根直径 变化范围 方差	体积中值直径 变化范围 方差	动能中值直径 变化范围 方差	六阶矩中值直径 变化范围 方差
单调下降型	7.4 5.5~10.1 1.2	7.7 5.7~10.7 1.3	8.1 6.1~11.2 1.4	8.6 5.3~13.9 2.3	9.8 5.9~15.9 2.6	11.3 6.0~17.7 2.9
单峰型	9.6 7~13.6 1.8	10.0 7.3~14.2 1.9	10.5 7.6~14.7 1.9	11.0 7.6~15.7 2.1	12.0 8.6~16.4 2.1	14.5 10~19.5 2.5
双峰型	10.7 7.5~14.7 2.1	11.4 8.3~15.4 2.1	12.1 9.0~15.9 2.0	13.9 9.5~17.1 2.3	15.4 9.9~23.1 3.2	17.1 10.6~24.4 3.6
平均谱	8.9 5.5~14.7 2.1	9.3 5.7~15.4 2.2	9.8 6.1~15.9 2.3	10.6 5.3~17.1 3.0	11.7 5.9~23.1 3.3	13.7 6.0~24.4 3.7

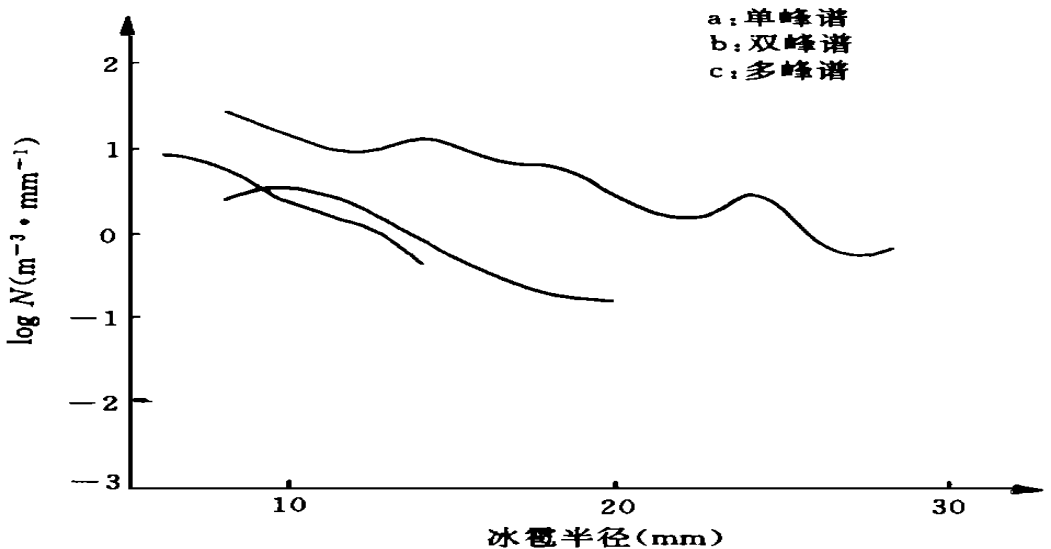


图 4 三类雹谱的典型分布

(a. 1987 年 7 月 12 日六盘山, 18: 35~18: 39; b. 1987 年 8 月 10 日  
陈新, 15: 55~16: 00; c. 1987 年 8 月 28 日惠台, 20: 33~20: 34)

### 3.3 参数法与拟合法的比较

从理论上讲, 雹谱应该是连续分布的, 而实际观测到的雹谱中, 某些或某个直径间隔的冰雹个数为 0, 这是由于取样体积的限制所造成的, 用指数谱拟合这种雹谱往往造成较大的误差。为此, 利用  $N = N_0 \exp(-\lambda D_i)$  中  $N_0 = f_1(Z, Q)$  和  $\lambda = f_2(Z, Q)$  的函数关系来求  $N_0$  和  $\lambda$  称为参数法, 其中  $Z$  为雷达反射率因子,  $Q$  为冰雹含水量。根据定义:

$$Z = \int_0^{\infty} N_0 \exp(-\lambda D_i) D_i^6 dD_i$$

$$Z = \frac{720}{\lambda^7} N_0 \quad (8)$$

$$Q = \int_0^{\infty} \frac{1}{6} \rho_i \pi D_i^3 N_0 \exp(-\lambda D_i) dD_i$$

$$Q = \pi \rho_i N_0 \frac{1}{\lambda^4} \quad (9)$$

由式(8)和(9)可得:

$$N_0 = \left( \frac{Z}{720} \right)^{\frac{4}{3}} \left( \frac{\pi \rho_i}{Q} \right)^{\frac{7}{3}} \quad (10)$$

$$\lambda = \left( \frac{Z}{720} \right)^{\frac{1}{21}} \left( \frac{\pi \rho_i}{Q} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (11)$$

由雹谱计算出  $Z$  和  $Q$ , 利用式(10)和(11)可求得每份雹谱的  $N_0$  和  $\lambda$ , 其结果列表 4。

表 4 谱参数  $N_0$  和  $\lambda$  值一览表

雹谱类型	参数法		拟合法	
	$N_0$	$\lambda$	$N_0$	$\lambda$
单峰	10.121	0.696	12.683	0.622
单调下降	7.223	0.723	9.331	0.621
双峰	19.94	0.704	1.859	0.498
平均谱	14.911	0.703	9.182	0.599

由参数法求得的  $\lambda$  值相当稳定, 62 份雹谱其  $\lambda$  值的变化范围为 0.645 ~ 0.796, 平均为 0.703;  $N_0$  的变化范围为 0.653 ~ 158.161。

### 3.4 雹谱随时间的演变

1987 年 7 月 14 日, 六盘山雷达站的 711 雷达对泾源县出现的雹云进行了跟踪观测, 并连续观测雹谱。测站 16 时 00 分开始降雹, 17 时 36 分雷达观测到的回波顶高为 9.5 km, 云底温度 7.0, 回波强度达 40 dB。泾源和惠台两个测点收集雹谱 3 份, 见图 5。

由图 5 可以看出, 雹谱演变过程为先窄谱后宽谱, 结束时又为窄谱。冰雹空间浓度的演变出现波动, 这可能是由于雹云单体的不同部位移过测站时所致。

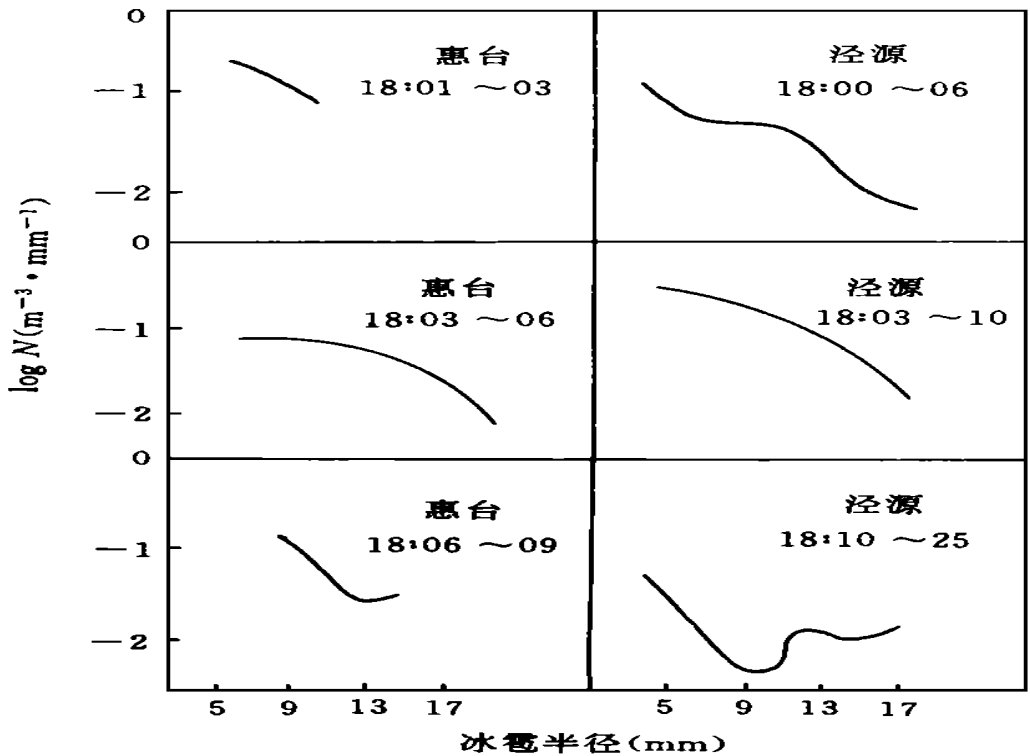


图 5 雹谱的时间演变

### 3.5 平均动能通量谱

由雹谱的平均谱计算了动能通量的平均谱, 其结果如图 2 所示。动能通量的计算公式如下:

$$E = \frac{\pi \rho_i}{12 \times 10^6} \sum_{D_i=0} N(D_i) D_i^3 V_i^3 \Delta D_i \quad (\text{J/m}^3 \text{ s}) \quad (12)$$

其中:

$$N(D_i) = \frac{n(D_i)}{S V_i(D_i) t} \quad (\text{个/m}^3) \quad (13)$$

$V_i(D_i)$  为冰雹下落末速度,  $S$  为取样面积,  $t$  为取样时间,  $n(D_i)$  为铝箔上的冰雹个数。 $V_i(D_i)$  的计算公式<sup>[5]</sup>如下:

$$V_i(D_i) = 1.8 \times 10^{-2} \left( \frac{\rho_i}{\rho_a} g \right)^{0.5} D_i^{0.4075} \quad (\text{m/s}) \quad (14)$$

计算时, 取  $\rho_i = 0.89 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_a = 1.02 \times 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ 。图 2 给出了动能通量的平均谱, 其峰值出现在冰雹直径  $D = 18 \text{ mm}$  处, 即谱分布中直径的中段, 中等大小冰雹的动能通量最大, 这是因为动能通量与冰雹直径的 4 次方成正比, 与冰雹浓度成正比, 冰雹浓度较大时, 直径较小; 冰雹直径较大时, 浓度较小, 故造成了动能通量在直径  $D = 18 \text{ mm}$  处达到峰值。看起来, 造成雹灾的关键是雹谱中处于中段的冰雹, 由雹谱的平均直径可以较好地反映雹灾灾情。

#### 4 $Z_e$ - $E$ 关系的建立及分析

六盘山雷达站专门用于人工防雷的 711 雷达,其波长  $\lambda = 3.2 \text{ cm}$ , 对于冰雹云,一般都应按照米散射计算等效反射率因子  $Z_e$ , 计算公式为:

$$Z_e = 10^6 \frac{\lambda^4}{\pi} \left| \frac{m^2 + 2}{m^2 - 1} \right|^2 \sum_{D_i=0}^{\infty} N(D_i) \sigma(D_i) \quad (\text{mm}^6/\text{m}^3) \quad (15)$$

$\sigma(D_i)$  为米散射下直径为  $D_i$  的冰雹的雷达后向散射截面, 单位为  $\text{mm}^2$ , 对冰粒子,  $\left| \frac{m^2 + 2}{m^2 - 1} \right|^2 = 0.197$ 。

根据 62 份雹谱资料, 计算了每份资料的动能通量和等效反射率因子, 它们之间的相关关系如图 6 所示。

由图 6 可知,  $Z_e$ - $E$  关系在双对数坐标系中基本呈直线分布, 根据指数拟合这一相关, 其相关关系为:

$$E = 1.28 \times 10^{-6} Z_e^{1.096} \quad (16)$$

式中:  $E(\text{J}/(\text{m}^2 \cdot \text{s}))$ ,  $Z_e(\text{mm}^6 \text{m}^{-3})$ , 相关系数  $R = 0.97$ , 显著性水平小于 0.01。

由式(16)得到的  $E$  值与雹谱计算得到的  $E$  值之间的平均相对误差为 22.9%。

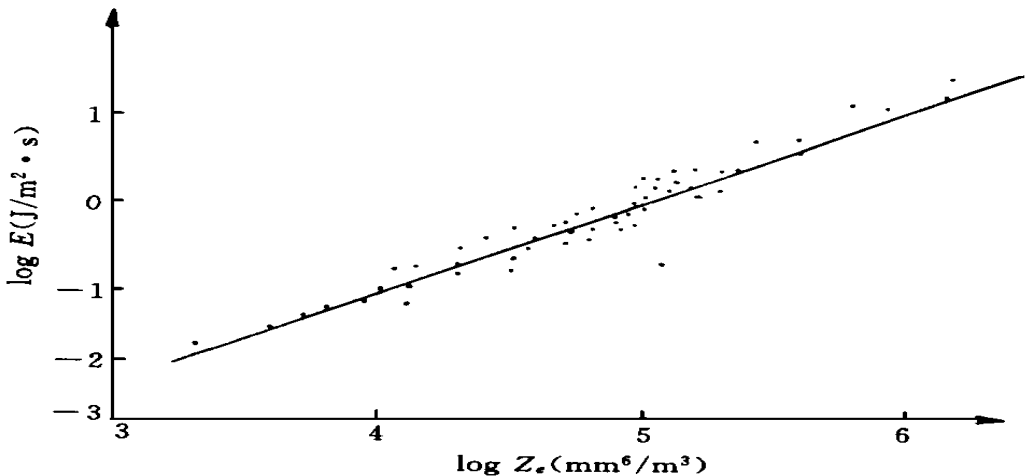


图 6 冰雹动能通量  $E$  与雷达等效反射率因子相关关系

表 5 由三类雹谱计算得到的  $Z_e$ - $E$  关系

谱型	$a \times 10^{-6}$	$b$	$R$	$ER1$ (%)	$ER2$ (%)	样本数
单峰	1.45	1.075	0.963	19.1	25.3	24
单调下降	3.15	0.988	0.996	5.6	25.8	26
双峰	1.50	1.093	0.988	21.2	20.7	12

表 5 中  $\alpha, b$  为  $E = aZ_e^b$  式中的系数,  $R$  为相关系数, 显著性水平小于 0.01,  $ER1$  为由拟合关系式和由雹谱计算的动能通量的相对误差,  $ER2$  为由  $Z_e$ - $E$  一般式(16)分别代替表 5 所



列的 3 类关系式计算动能通量所造成的相对误差。由此可见, 相对误差在 25.8% 的范围内, 可由一般式代替按照雹谱分类得到的关系式。

## 5 小 结

通过统计分析 22 个冰雹过程的 62 份雹谱资料, 得到了宁南山区冰雹的平均谱, 并与其它省区的平均谱作了比较, 分析了雹谱的时间演变特征。由此得到平均动能通量谱, 并建立了  $Z_e-E$  关系。这为以后开展防雷效果评估等工作打下了基础。

## 参考文献

- 1 Waldvogel A and Federer. The kinetic energy of hailfalls, part : spectra. J Appl Meteor, 1978, 17: 515- 520
- 2 Schmid W H, Schiesser and Waldvogel. The kinetic energy of hailfalls, part : patterns of hailpad and radar data. J Appl Meteor, 1992, 31: 1165- 1178
- 3 Lozowski E P and Strong G S. On the calibration of hailpads. J Appl Meteor, 1978, 17: 521- 528
- 4 LiZihua, Shi Wengquan and Zheng Guoguang. Hailstone microphysics reseaches in China. Papers Presented At the Fourth WMO Scientific Conference on Weather Modification, 1985. 97- 102
- 5 徐家骝. 冰雹微物理与成雹机制. 北京: 农业出版社, 1979. 110

# PRELIMINARY ANALYSIS OF THE HAILSTONE SPECTRA DISTRIBUTION AND THE RELATIONS BETWEEN $Z_e$ AND $E$

Niu Shengjie Ma Lei Zhai Tao

(Ningxia Research Institute of Meteorological Science, Yinchuan, 750002)

## Abstract

A large number data of ground hailstone spectra are analysed. The average characteristics of hailstone spectra and their three types have been obtained. After computing the kinetic energy flux of hailfalls, the  $Z_e-E$  relations are established, and the correlation coefficient is more than 0.96, the significance level is less than 0.01. This work makes a firm basis to evaluate the effects of artificial hail suppression by means of hailpads and radar.

**Key words:** Hailstone spectra, Kinetic energy flux of hailfalls,  $Z_e-E$  relations.