静力平衡模式在中尺度大气模拟中的适用性问题*

胡志晋 包绍武 杨志伟

(中国气象科学研究院, 北京, 100081)

摘 要

静力平衡模式是目前数值天气预报的主要模式。近年来随着模式分辨率的提高, 非静力平衡模式在中国的研制和 MM5 等模式的引进, 从理论研究和应用的角度看, 有必要对这两种模式在中尺度大气模拟中的适用性问题作细致的分析研究。本文从理论上分析了静力平衡假定下重力波频率模拟的误差, 指出其相对误差随 Δx 增大成平方的减少。当 $\Delta x \geq 20$ km 时, 相对误差小于 4%, 当 $\Delta x \leq 10$ km 时, 相对误差可能大于 16%。和一般顾名思义的概念不同, 静力模式计算的重力波频率被夸大, 计算的垂直加速度也由于略去惯性项而夸大。推导的准静力平衡模式, 对静力平衡模式作了惯性项订正, 个例试验也肯定了上述结果。

关键词: 静力平衡模式, 中尺度, 适用性, 准静力平衡模式。

1 引 言

大气静力平衡模式在数值天气预报中被广泛采用, 取得了很大成功, 积累了很多使用的经验。由于生产的需求和计算能力的提高, 数值天气预报模式的空间分辨率越来越高。水平格距为 50～90 km 区域天气预报模式已在中国投入业务试验, 格距更小的模式正在研究。大气静力平衡假定只有在大气运动的水平尺度远大于垂直尺度的条件下成立[1]。对于大尺度天气运动这是不成问题的, 对于中尺度大气运动就需要作比较细致的分析。十多年来三维非静力平衡模式在国内外有了迅速发展, 它对大气运动方程未作简化, 可以适用于各种尺度的大气运动, 但其计算量很大。过去主要将它用于中-γ 尺度的对流降水过程, 近年来随着计算机的飞速发展, 已经开始用于中-β 尺度大气过程, 有人甚至把它用于中-α 尺度天气过程。在中尺度大气模式迅速发展的今天, 必须对大气静力平衡模式的适用性作一细致的研究, 一方面可以防止静力平衡模式在它不适用的条件下盲目应用, 导致严重的误差, 另一方面, 可以尽量发挥它在适用条件下的应用, 避免盲目采用非静力平衡模式导致计算能力的浪费。此外, 探索静力平衡模式的改进途径, 使它在更小尺度上适用, 对于弥补中国相对薄弱的计算机能力, 开拓创新也有重要意义。

2 大气原始方程组(静力平衡模式)是大气初始方程组(非静力平衡模式)的

* 初稿时间: 1997 年 9 月 30 日; 修改稿时间: 1998 年 3 月 10 日。
资助课题: 自然科学基金(49475248)。

一种近似

在未经简化的大气初始方程组中, 垂直方向的运动方程为:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+c_p\theta\frac{\partial \pi}{\partial z}=-g(1+Q)+A_w \tag{1}$$

式中 Q 为凝结水的比质量, A_w 为垂直速度的平流和次尺度混合项。为了提高计算精度, 可采用背景场法得出

$$\frac{\partial W}{\partial t}+c_p\theta_0\frac{\partial \pi'}{\partial z}=g\frac{\theta'}{\theta_0}-gQ+A_w \tag{2}$$

式中

$$\theta=\theta_0(z)+\theta',\qquad \pi=\pi_0(z)+\pi' \tag{3}$$

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial z}=-\frac{g}{c_p\theta_0} \tag{4}$$

静力平衡模式(又称大气原始方程组)就是在垂直运动方程中略去加速度项 $\left(\frac{\partial W}{\partial t}\right)$, 即 A_w, 式(1)简化为:

$$c_p\theta\frac{\partial \pi}{\partial z}=-g(1+Q) \tag{5}$$

或

$$c_p\theta_0\frac{\partial \pi'}{\partial z}=g\frac{\theta'}{\theta_0}-gQ \tag{6}$$

很多模式中不考虑水凝物的作用而取成下列形式:

$$c_p\theta\frac{\partial \pi}{\partial z}=-g \tag{7}$$

或

$$c_p\theta_0\frac{\partial \pi'}{\partial z}=g\frac{\theta'}{\theta_0} \tag{8}$$

3　静力平衡近似的误差

胡志晋等 1991[2] 曾推出包含湿绝热过程的大气初始方程组的垂直速度方程为:

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{\partial^4}{\partial t^4}-C_0^2\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{g}{C_0^2}+\frac{\delta\Gamma_\theta}{\theta_0}\right)-\right.\right.\\
&\left.\frac{1}{C_0^2}\left(\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}-g\frac{\delta\Gamma_\theta}{\theta_0}+g\delta\Gamma_Q+f^2\right)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2}-C_0^2\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}-g\frac{\delta\Gamma_\theta}{\theta_0}+g\delta\Gamma_Q\right)-\right.\\
&\left.\left.f^2\left[\frac{1}{C_0^2}\left(\frac{g}{\theta_0}\frac{\partial\theta_0}{\partial z}+g\frac{\delta\Gamma_\theta}{\theta_0}+g\delta\Gamma_Q\right)-\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{\theta_0}\frac{d\theta_0}{dz}\right)\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{g}{C_0^2}+\frac{\delta\Gamma_\theta}{\theta_0}\right)\right]\right\}\right\}w=\\
&C_0^2\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{1}{\theta_0}\frac{d\theta_0}{dz}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_u}{\partial x}+\frac{\partial A_v}{\partial y}\right)+f\left(\frac{\partial A_v}{\partial x}-\frac{\partial A_u}{\partial y}\right)-\frac{c_p\theta_0}{C_0^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)A_\pi\right]+\\
&\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+f^2\right)-C_0^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\right]\left(\frac{\partial A_w}{\partial t}+\frac{g}{\theta_0}A_\theta-gA_Q\right)\end{aligned} \tag{9}$$

式中 C_0 为声速, $C_0^2=\frac{c_p}{c_v}RT$; δ 在云内为 1, 在云外为 0; Γ_θ 和 Γ_Q 为湿绝热过程中云中位温

θ和水凝物比质量Q的垂直递增率。A_B为物理量B的平流项。此方程左边为W的函数,右边为各种平流项的函数。

假定W有下列形式的解:

$$w = \tilde{w}\exp[b^* z + \mathrm{i}(lx + my + nz - \omega t)] \tag{10}$$

$$b^* = \frac{1}{2}\left(\frac{N^2}{g} + \frac{g}{C_0^2} + \frac{\delta M_1^2}{g}\right) \tag{11}$$

式中l, m, n为三维波数,ω为频率,$M_1^2 = \frac{\theta_0}{g}\Gamma_\theta, N^2 = \frac{g}{\theta_0}\frac{\mathrm{d}\theta_0}{\mathrm{d}z}$

代入方程(9)可得频率的近似解为:

$$\omega_s^2 = C_0^2(l^2 + m^2 + n^2 + b^2) + (N^2 - \delta M_2^2) + f^2 \tag{12}$$

$$\omega_g^2 = \frac{(N^2 - \delta M_2^2)(l^2 + m^2) + f^2(n^2 + b^2) + \frac{1}{C_0^2}f^2(N^2 - \delta M_2^2)}{l^2 + m^2 + n^2 + b^2 + \frac{1}{C_0^2}(N^2 - \delta M_2^2 + f^2)} \tag{13}$$

式中$b = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{C_0^2} - \frac{N^2}{g} + \frac{\delta M_2^2}{g}\right), M_2^2 = g\left(\frac{\Gamma_\theta}{\theta_0} - \Gamma_Q\right)$,$\omega_s$为声波,重力波和惯性波之和,其中声波的数量级最大,是占优势的。ω_g为重力波和惯性波之和,在中小尺度大气过程中重力波是主要的。

对于静力平衡方程组,即用式(6)代替式(2)而其他方程不变,类似地可以得出垂直速度方程为:

$$< \left[\left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{N^2}{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{g}{C_0^2} - \frac{\delta M_1^2}{g}\right) - \frac{1}{C_0^2}(N^2 - \delta M_2^2)\right]\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(N^2 - \delta M_2^2) -$$

$$f^2\left[\frac{1}{C_0}(N^2 - \delta M_2^2) - \left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{N^2}{g}\right)\left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{g}{C_0^2} - \frac{\delta M_1^2}{g}\right)\right] > W =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} - \frac{N^2}{g}\right)\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial A_u}{\partial x} + \frac{\partial A_v}{\partial y}\right) + f\left(\frac{\partial A_v}{\partial x} - \frac{\partial A_u}{\partial y}\right) - \frac{c_p\theta_0}{C_0^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)A_\pi\right] +$$

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{C_0^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + f^2\right)\right]\left[\frac{g}{\theta_0}A_\theta - gA_Q\right] \tag{14}$$

其频率解为
$$\omega_g^2 = \frac{(l^2 + m^2)(N^2 - \delta M_2^2) + f^2(n^2 + b^2) + \frac{1}{C_0^2}f^2(N^2 - \delta M_2^2)}{n^2 + b^2 + \frac{1}{C_0^2}(N^2 - \delta M_2^2)} \tag{15}$$

同非静力平衡模式的式(12),(13)相比,静力平衡模式的声波已经滤去,重力波频率误差主要在于分母中略去了$l^2 + m^2$,其相对误差为:

$$\Delta = \frac{l^2 + m^2}{n^2 + b^2 + \frac{1}{C_0^2}(N^2 - \delta M_2^2)} \tag{16}$$

其量级由 $l^2/\max\left(n^2, b^2, \frac{N^2-\delta M_2^2}{C_0^2}\right)$ 决定。其中 $b=\frac{1}{2}\left(\frac{g}{C_0^2}-\frac{N^2-\delta M_2^2}{g}\right)$，右边第 1 项为 $10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$ 量级, 第二项不大于 $10^{-5}\mathrm{m}^{-1}$ 量级, 所以 b^2 为 $0.3\times10^{-8}\mathrm{m}^{-2}$ 的量级。$\frac{N^2-\delta M_2^2}{C_0^2}$ 的最大量级为 $10^{-9}\mathrm{m}^{-2}$, n 为垂直波数, 它的变化范围较大, 在大气层结稳定, 垂直扰动较小时 n^2 为 $10^{-5}\mathrm{m}^{-2}$, 当大气不稳定或在深对流云中, n 达 $10^{-4}\mathrm{m}^{-1}$, 由于对流顶层的限制 n 不会小于 $3\times10^{-5}\mathrm{m}^{-1}$, 这样相对误差 Δ 的估值为:

$$\Delta=\frac{l^2}{\max(0.3\times10^{-8}, n^2)} \tag{17}$$

或

$$\Delta=\left[\frac{\min(20, H)}{L}\right]^2=\left[\frac{\min(20, H)}{5\quad\Delta x}\right]^2 \tag{18}$$

式(17)中 l 和 n 为水平和垂直波数, 单位为 m^{-1}; 式(18)中 L 和 H 为水平和垂直波长, 是波数 l 和 n 的倒数, 单位为 km; H 的取值范围为稳定大气中的 0.3 km 到深对流的 30 km。最小水平波长可取为水平格距 Δx 的 4～5 倍。在不稳定的深对流大气中误差估计值为:

$$\Delta=\left(\frac{4}{\Delta x}\right)^2 \tag{19}$$

式中 Δx 的单位为 km。当 $\Delta x\geq20$ km 时, $\Delta\leq4\%$, 当 $\Delta x\leq10$ km 时, $\Delta\geq10\%$。在稳定大气中, Δ 值可相应减小到 0.4% ～0.04% 和 1.6% ～0.16%。对于数值计算的全场而言, 了解全场中最大的误差是实质性的。即使只在个别地区存在不稳定的深对流条件, 全场的误差估计仍以式(19)为宜。可以认为当 $\Delta x\geq20$ km, 静力平衡近似仍能适用(误差小于 4%), 当 $\Delta x\leq10$ km, 静力平衡近似已不能适用(误差大于 16%)。

Ross 等[3]和 Orlanski[4]曾用滞弹非静力平衡模式同滞弹静力平衡模式作冷锋个例的二维数值模式的对比, 得出当 $\Delta x=20$ km 时, 两者没有显著差别, 当 $\Delta x=8$ km 时, 两者差别显著。这同本文理论分析结果一致。

4　静力平衡模式的改进——准静力平衡模式

模拟计算时间步长受下列稳定性限制:

$$\Delta t=\alpha\quad\min\left[\frac{\Delta x}{\max(c_s, c_g, u, v)}, \frac{\Delta z}{\max(c_s, c_g, w)}\right] \tag{20}$$

式中 $\alpha<1$; Δx, Δz 为水平、垂直格距; c_s, c_g 分别为声波和重力波速度, u, v, w 分别为水平和垂直速度。其中 $c_s\approx330$ m/s, $c_g\approx80$ m/s。

对于非静力平衡模式, $c_s>c_g, u, v, w$, 时间步长受下式控制:

$$\Delta t=\alpha\quad\min\left[\frac{\Delta x}{c_s}, \frac{\Delta z}{c_s}\right] \tag{21}$$

由于 $\Delta z<\Delta x$, 故

$$\Delta t=\alpha\quad\frac{\min(\Delta z)}{c_s}=\alpha\quad\frac{\min(\Delta z)}{330} \tag{22}$$

为了提高时间步长,有的非静力模式在垂直方向对 π'和 w 采用隐式计算格式,则

$$\Delta t = \alpha \frac{\Delta x}{c_s} = \alpha \frac{\Delta x}{330} \tag{23}$$

对于静力平衡模式而言,如上节所示,声波已经滤去,在垂直方向 π'和 w 都是诊断的,也就是隐式计算的,所以

$$\Delta t = \alpha \frac{\Delta x}{\min(c_g, u, v)} \cong \alpha \frac{\Delta x}{80} \tag{24}$$

静力平衡模式可以采用较大时间步长,在大尺度和中 α尺度大气模拟中具有很高的精度,所以被广泛采用为数值预报模式,对于中 β 尺度的模拟,静力平衡模式可能有明显的误差。为了使它能在更小尺度上适用,可考虑下列准静力平衡模式。

初始方程(1) 或(2) 可以改写如下:

$$c_p \theta \frac{\partial \pi}{\partial z} = - g(1 + Q) - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{25}$$

或
$$c_p \theta_0 \frac{\partial \pi'}{\partial z} = g \frac{\theta'}{\theta_0} - gQ - \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} \tag{26}$$

右边最后一项可以看作是惯性力项。

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial w}{\partial t} - A_w = \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} \tag{27}$$

静力平衡模式就是略去了右边的惯性力项,所以垂直速度的变化没有一个加速的过程,垂直气压梯度力和重力瞬时平衡,水平辐散和垂直辐合瞬时平衡,这样就造成垂直速度及其变化的夸大。

从上节得出的重力波频率 ω_g(式(13) 和式(15))也可以看出这一特点。静力平衡模式的垂直速度频率大于非静力模式。从两种模式的名称来看,似乎静力平衡的垂直速度变化应比非静力的小,实际上这是错误的。上述 Olanski[4] 的例子中当 $\Delta x = 8$ km 时,静力平衡模式的垂直速度最后因过大而超界。

为了订正这一误差,Orlanski[4] 提出了准静力模式,并在二维 xz 坐标框架内作了计算。他将计算分成两步:第一步按静力模式计算 u, v, π, w 的过渡值,第二步根据 w 的过渡值求出$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}$,以此按式(25) 或(26) 求出 π 的订正值,再求出 u, v 的相应订正值。对通用的三维 p-σ 坐标静力平衡模式考虑垂直惯性力作用后可推导出下列准静力平衡模式:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \ln(\sigma + p_t/p_s)} = \frac{\partial \Phi_H}{\partial \ln(\sigma + p_t/p_s)} + \frac{\partial \Phi_C}{\partial \ln(\sigma + p_t/p_s)} \tag{28}$$

$$\frac{\partial \Phi_H}{\partial \ln(\sigma + p_t/p_s)} = - \frac{RT_v}{1 + Q} \tag{29}$$

$$\frac{\partial \Phi_C}{\partial \ln(\sigma + p_t/p_s)} = - \left(\frac{RT_v}{1 + Q - \frac{1}{\rho g^2}\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}(1 + Q)} \right) \frac{1}{\rho g^2} \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{30}$$

式中 φ_H 和 φ_C 为位势高度的静力部分和非静力订正部分, p_t, p_s 为模式顶、底气压, $\omega=\frac{dp}{dt}$

首先用已知的 $\tau-1$ 和 τ 时刻的 φ_H 及其他变量值通过静力平衡方程求出 $\tau+1$ 时刻的 u_H, v_H, φ_H, P^*_H, σ_H, ω_H, 再用下式求出 $\frac{\partial\omega}{\partial t}$:

$$\frac{dp^*\omega}{dt}=\frac{\partial p^*\omega}{\partial t}+m^2\left(\frac{\partial p^*u\omega/m}{\partial x}+\frac{\partial p^*v\omega/m}{\partial y}\right)+\frac{\partial p^*\omega\dot{\sigma}}{\partial\sigma} \tag{31}$$

式中

$$\frac{\partial p^*\omega}{\partial t}=\beta\left(p^{*\tau+1}_H\omega^{\tau+1}_H-p^{*\tau-1}_H\omega^{\tau-1}\right)/2(\Delta\tau) \tag{32}$$

β 为订正系数, 由于 $\omega^{\tau+1}_H$ 在计算时略去了惯性项, 其变化偏大, 所以一般 $\beta<1$ 用式(30) 求出 φ_C 再对动力方程订正:

$$u^{\tau+1}=u^{\tau+1}_H-m\frac{\partial\varphi_C}{\partial x}2(\Delta\tau) \tag{33}$$

$$v^{\tau+1}=v^{\tau+1}_H-m\frac{\partial\varphi_C}{\partial y}2(\Delta\tau) \tag{34}$$

再用订正后的 u, v 值求出最终的 P^* 和 $\dot{\sigma}$ 值。T, Q 不需订正。为了减少短波扰动, $\frac{d\omega}{dt}$ 的值可作适当的水平平滑。

在 MM4 的基础上用上述准静力模式对一个个例用 $\Delta x=8$ km 和 24 km 作了模拟, 并同静力平衡模式作了对比。当 $\Delta x=24$ km 时, 订正值很小, 当 $\Delta x=8$ km 时, 准静力模式运行稳定, 结果合理, 订正值可达 10% 以上。在另一个个例中, 采用了详细的云微物理过程。用 $\Delta x=10$ km 和 $\Delta x=30$ km 进行了模拟。当 $\Delta x=30$ km 时, 订正值也很小, 静力模式和准静力模式的结果差别不大。当 $\Delta x=10$ km 时, 静力模式在 30 km 和 10 km 套网格的边界处出现不稳定, 导致计算溢出, 而准静力模式计算稳定, 结果也较为合理。

这些结果同 Orlanski 的二维滞弹模式结果基本一致, 同本文理论分析结果也是一致的。

5　结　语

理论分析表明采用静力平衡假定模拟的重力波频率相对误差随着 Δx 增大成平方减少。当 $\Delta x\geq 20$ km 时, 估计的相对误差较小; 当 $\Delta x\leq 10$ km 时, 估计相对误差较大, 静力平衡已难于适用。虽然本文理论分析中有很多忽略和近似, 但对实际选用不同模式仍有一定参考作用。此外, 静力平衡模式由于略去惯性项而夸大了垂直加速度, 造成垂直速度的波动频率加大。在静力平衡模式的基础上, 加上惯性项的订正, 可以构成准静力平衡模式, 个例试验也定性地肯定了上述理论分析结果。

参考文献

1　廖洞贤, 王两铭. 数值天气预报原理及其应用. 气象出版社, 1986. 20～28

2　胡志晋等. 大气非静力平衡模式和弹性适应. 中国科学, 1991, B 辑, (5): 550～560

3　Ross B B and Orlanski I. The circulation associated with a cold front. Part 2: moist case. J Atmos Sci, 1978, 35: 445～465

4　Orlanski I. The quasi-hydrostatic approximation. J Atmos Sci, 1981. 38: 572～582

THE APPLICABILITY OF STATIC EQUILIBRIUM MODELS IN MESOSCALE ATMOSPHERIC SIMULATION

Hu Zhijin Bao Shaowu Yang Zhiwei

(*Chinese Academy of Meteorological Sciences, Beijing*, 100081)

Abstract

Presently static equilibrium models are the main numerical weather forecasting models. In recent years with the increase of the model resolution, the development of non-static equilibrium models in China and the introduction of MM5 and other models, the applicability of these two kinds of models in mesoscale atmospheric simulation must be clarified. The error of the simulated frequency of gravitational wave was analized under the static equilibrium postulation. It was indicated that the relative error is in inverse proportion to the square of horizontal resolution (ΔX). When $\Delta X \geq 20$ km, the relative error is less than 4%. When $\Delta X \leq 10$ km, the relative error is probably greater than 16%. Different to the concept just as its name implies, the simulated frequency of gravitational wave under the static equilibrium postulation is exaggerated, and the computed vertical acceleration is also aggrandized because of the omission of the inertia term. The case researches by using the quasi-static equilibrium model described in this paper where the inertia term was corrected also agreed with the conclusion mentioned above.

Key words: Static equilibrium models, Mesoscale, Applicability, Quasi-static equilibrium model.