

# 垂直切变和地形影响下惯性重力波的发展\*

吴 洪 林锦瑞

(北京气象学院大气科学系, 北京, 100081)

## 摘 要

采用分层浅水波方程和 WKB 方法, 分别讨论了在基流垂直切变和地形的影响下, 二维惯性重力波的稳定性及其发展, 并根据理论结果试图解释 1992 年 6 月 21 日发生在京津冀的一次飊线演变与惯性重力波之间的关系, 这可能为飊线预报提供一种思路。

关键词: 惯性重力波, 垂直切变, 地形。

## 1 引 言

大气中的惯性重力波在适当的条件下可以触发积云对流。吕克利<sup>[1]</sup>、吴池胜<sup>[2]</sup>等曾分别讨论过东西向的山脉对惯性重力波的影响, 得到了一些有益的结论。然而, 在他们的分析中, 没有考虑基本气流垂直切变的作用, 且只考虑一维波动。因此, 文中试图在一个考虑垂直切变的浅水波模式中, 讨论基流垂直切变和地形对二维惯性重力波的影响。

## 2 基本方程

将大气分为两层, 设上、下层大气的密度与纬向基本气流分别为  $\rho_1, \pi_1$  和  $\rho_2, \pi_2$ , 则描述下层大气运动的方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = - \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial (H_2 + h - h_s)}{\partial x} + v \frac{\partial (H_2 + h - h_s)}{\partial y} + (H_2 + h - h_s) \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) = 0 \\ p = \rho_1 g (H_1 - H_2 - h) + \rho_2 g (H_2 + h - z) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $h_s$  为地形高度, 其它的符号为气象中常用符号。假设上、下层大气中的基本气流满足地转关系:

$$\begin{cases} \bar{u}_1 = - \frac{g}{f} \frac{\partial H_1}{\partial y} = \text{const} \\ \bar{v}_1 = 0 \end{cases} \quad (2)$$

\* 初稿时间: 1996 年 1 月 17 日; 修改稿时间: 1997 年 1 月 9 日。

$$\begin{cases} \bar{u}_2 = -\frac{g}{f\rho_2}[\rho_1 \frac{\partial H_1}{\partial y} + (\rho_2 - \rho_1) \frac{\partial H_2}{\partial y}] = \text{const} \\ \bar{v}_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

由式(2)和(3)可得:

$$\begin{cases} \frac{\partial H_2}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} = \frac{f}{g^*} \frac{\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_2 \bar{u}_2}{\rho_2} \end{cases} \quad (4)$$

其中:  $g^* = g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2}$  为约化重力

为了便于数学处理,假定地形为东西走向的山脉,其南、北坡的坡度均为常数,令

$$\alpha = \frac{dh_s}{dy}$$

在南坡  $\alpha > 0$ , 北坡  $\alpha < 0$ 。

令  $u = \bar{u}_2 + u, v = v$ , 将方程组(1)线性化后可得(略去“ ”号):

$$\begin{cases} (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x})u - fv = -g^* \frac{\partial h}{\partial x} \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x})v + fu = -g^* \frac{\partial h}{\partial y} \\ (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x})h + H \frac{\partial u}{\partial x} + (\frac{\partial H}{\partial y} + H \frac{\partial}{\partial y})v = 0 \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $H = H_2 - h_s$

$$\text{令 } v = \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{f}{g^*} \frac{\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_2 \bar{u}_2}{\rho_2} - \alpha$$

将方程组(5)合并化简,最后得到:

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x}) [(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x})^2 + f^2 - g^* H \frac{\partial^2}{\partial x^2}] h \\ & - g^* (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x}) (v + H \frac{\partial}{\partial y}) \frac{\partial h}{\partial y} + g^* f v \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

作变换:

$$h = h^* e^{-\frac{v}{2H} dy} \quad (7)$$

代入方程(6)中化简,就可得波动方程:

$$\begin{aligned} & (\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x}) [(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x})^2 + f^2 - g^* H \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{g^* v^2}{4H}] h^* \\ & + g^* f v \frac{\partial h^*}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

### 3 稳定性分析

设方程(8)有形式解:

$$h^* = A e^{-i(kx + my - \omega t)} \quad (9)$$

将式(9)代入方程(8)中整理得:

$$\omega^3 - \omega \omega + \omega = 0 \quad (10)$$

其中:

$$\begin{cases} \omega = \omega - k\bar{u}_2 & \text{为 Doppler 频率} \\ \omega = f^2 + g^* H K^2 - \frac{g^* v^2}{4H} \\ \omega = g^* f v k \\ K^2 = k^2 + m^2 \end{cases}$$

对于低频波, 频率方程(10)可近似为<sup>[3]</sup>:

$$\omega \omega - \omega = 0 \quad (11)$$

即:

$$\omega = \frac{g^* f v k}{f^2 + g^* H K^2 - \frac{g^* v^2}{4H}}$$

从形式上来看, 该低频波呈单向传播性, 可视为一种地形 Rossby 波。

对于高频波而言, 式(10)近似为<sup>[3]</sup>:

$$\omega^3 - \omega \omega = 0 \quad (12)$$

则式(12)有3个根:

$$\begin{cases} (\omega)_1 = 0 \\ (\omega)_2 = f^2 + g^* H K^2 - \frac{g^* v^2}{4H} \end{cases}$$

其中  $(\omega)_1 = 0$  不合理, 应舍去; 而  $(\omega)_2$  则为含有基流垂直切变和地形作用的惯性重力波频率, 与此对应的波动方程可简略为:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x}\right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 + f^2 - g^* H \dots - \frac{g^* v^2}{4H}\right] h^* = 0 \quad (13)$$

此时的惯性重力波稳定性判据为:

$$\begin{aligned} f^2 + g^* H K^2 - \frac{g^* v^2}{4H} &> 0 && \text{稳定} \\ &< 0 && \text{不稳定} \end{aligned} \quad (14)$$

而

$$v = \frac{f}{g^*} \frac{\rho_1 \bar{u}_1 - \rho_2 \bar{u}_2}{\rho_2} - \alpha$$

取近似  $\rho_1 \approx \rho_2 = \rho$ , 则

$$v = \frac{f}{g^*} \bar{u} - \alpha$$

其中:  $\bar{u} = \bar{u}_1 - \bar{u}_2$  表示基本气流的垂直切变

所以式(14)可改写为:

$$\begin{aligned} f^2 + g^* H K^2 - \frac{g^*}{4H} \left(\frac{f}{g^*} \bar{u} - \alpha\right)^2 &> 0 && \text{稳定} \\ &< 0 && \text{不稳定} \end{aligned} \quad (15)$$

由式(15)可讨论基流垂直切变和地形对惯性重力波稳定性的影响:

(1) 若不考虑上层空气具有基本气流, 即  $\bar{u}_1 = 0$ , 则稳定性的结论与文献[1]、[2]相

同。

(2) 当  $\bar{u} > 0$  (西风随高度增强, 或东风随高度减弱) 时, 山脉的北坡有利于波动不稳定, 山脉的南坡则不利于惯性重力波不稳定。

(3) 当  $\bar{u} < 0$  (西风随高度减弱, 或东风随高度增强) 时, 南坡有利于波动不稳, 北坡则抑制波动不稳。

#### 4 扰动发展分析

根据文献[4]的思想, 即便是稳定的惯性重力波, 它在某些时空位置上也能发展。因此, 下文将讨论波能量(振幅)的变化受哪些因素的影响。

设方程(13)的形式解为:

$$h^* = A(X, Y, T) e^{i\theta(x, y, t)} \quad (16)$$

其中:  $(X, Y, T) = \epsilon (x, y, t)$  分别是空间和时间的缓变量,  $\epsilon$  为小参数;  $\theta(x, y, t)$  为位相函数,  $k = \frac{\partial \theta}{\partial x}$ ,  $m = \frac{\partial \theta}{\partial y}$ ,  $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$  分别表示局地波数和圆频率;  $A(X, Y, T)$  为波动振幅。利用 WKB 方法将  $A$  展开:

$$A = A_0 + \epsilon A_1 + \epsilon^2 A_2 + \dots \quad (17)$$

将式(16)、(17)代入方程(13)中, 取  $\epsilon$  的零级近似, 可以得到波动的局地频率方程:

$$\omega^3 - \omega \omega = 0$$

$\omega$ ,  $\omega$  的表达式与式(10)相同。由此可求得波动的速度分别为:

$$\begin{cases} C_x = \frac{\omega}{k} = \bar{u}_2 + \frac{w_D}{k} \\ C_y = \frac{\omega}{m} = \frac{k}{m} \bar{u}_2 + \frac{w_D}{m} \end{cases} \quad (18)$$

对于稳定的波动而言, 基流的垂直切变或山脉均使得传播速度减慢; 且在地形的南北坡, 当  $\bar{u}$  存在时, 波动在两侧的传播不一致。

由局地频率方程求得群速度的各分量:

$$\begin{cases} C_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \bar{u}_2 + \frac{g^* H k}{\omega} \\ C_{gy} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \frac{g^* H m}{\omega} \end{cases} \quad (19)$$

因波动的能量  $E$  波振幅( $A_0^2$ ), 取  $\epsilon$  的一级近似得:

$$\begin{aligned} 2\omega^2 \frac{dA_0}{dT} + 2\omega g^* H k \frac{\partial A_0}{\partial X} + 2\omega g^* H m \frac{\partial A_0}{\partial Y} \\ = - [3\omega \frac{d\omega}{dT} + g^* H (\omega \frac{\partial k}{\partial X} + w_D \frac{\partial m}{\partial Y} - \frac{dK^2}{dT})] A_0 \end{aligned} \quad (20)$$

其中:  $\frac{d}{dT} = \frac{\partial}{\partial T} + \bar{u}_2 \frac{\partial}{\partial X}$

式(20)两端乘以  $A_0$  (若  $A_0$  为复数, 式(20)乘以  $A_0$  的共轭复数  $A_0^*$ , 加上式(20)的复共轭方程乘以  $A_0$ , 并除以 2), 再利用式(19)和下列关系式:

$$\frac{\partial \omega}{\partial X} = -\frac{dk}{dT} \quad \frac{\partial \omega}{\partial Y} = -\frac{dm}{dT}$$

就可得到波动能量方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T}(\omega^2 A_0^2) + \frac{\partial}{\partial X}(\omega^2 C_{gx} A_0^2) + \frac{\partial}{\partial Y}(\omega^2 C_{gy} A_0^2) \\ = g^* m \omega_D \frac{\partial H}{\partial Y} A_0^2 \end{aligned} \quad (21)$$

假设在所考虑的波包区域边界上扰动为零, 即  $A_0 = 0$ , 则对方程(21)积分后得:

$$\frac{\partial}{\partial T} \iint \omega^2 A_0^2 dX dY = g^* \iint m \omega \frac{\partial H}{\partial Y} A_0^2 dX dY \quad (22)$$

因

$$\begin{cases} \frac{\partial H}{\partial Y} = \frac{f}{g^*} \hat{u} - \alpha \\ \omega = \omega - k \hat{u} \\ C_y = \frac{\omega}{m} \end{cases}$$

令  $E = \omega^2 A_0^2$

由方程(22)变换成:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial T} \iint E dX dY = - \hat{u}_2 \iint k m \left( \frac{f}{g^*} \hat{u} - \alpha \right) A_0^2 dX dY \\ + g^* \iint m^2 C_y \left( \frac{f}{g^*} \hat{u} - \alpha \right) A_0^2 dX dY \end{aligned} \quad (23)$$

因此, 可根据上式讨论惯性重力波的发展。

(1) 若不考虑上层基流( $\hat{u}_1 = 0$ )和二维波动( $k = 0$ ), 则结论与文献[2]相同。

$$(2) \frac{\partial}{\partial T} \iint E dX dY = - f \hat{u}_2 \hat{u} \iint k m A_0^2 dX dY$$

当西风随高度增强( $\hat{u}_2 > 0, \hat{u} > 0$ )时, 导式波( $k > 0, m > 0$ )减弱, 曳式波( $k > 0, m < 0$ )发展; 当西风随高度减弱( $\hat{u}_2 > 0, \hat{u} < 0$ )时, 导式波发展, 曳式波减弱。当东风随高度增强( $\hat{u}_2 < 0, \hat{u} < 0$ )时, 导式波减弱, 曳式波发展; 当东风随高度减弱( $\hat{u}_2 < 0, \hat{u} > 0$ )时, 导式波发展, 曳式波减弱。因此, 当基流随高度增强(减弱)时, 曳(导)式波发展。

$$(3) \frac{\partial}{\partial T} \iint E dX dY = f \hat{u} \iint m^2 C_y A_0^2 dX dY, \text{ 当 } \hat{u} > 0 \text{ 时, 向北传播}(C_y > 0) \text{ 的惯性重}$$

力波发展, 向南传播( $C_y < 0$ )的波动衰减。当  $\hat{u} < 0$  时, 向南传播的波动发展, 向北传播的波动减弱。

$$(4) \frac{\partial}{\partial T} \iint E dX dY = g^* \hat{u}_2 \iint k m \alpha A_0^2 dX dY \text{ 在西风基流中, 地形的南坡有利于}$$

导式波发展, 曳式波减弱; 北坡有利于曳式波发展, 导式波减弱, 相反; 在东风基流中, 导式波于北坡发展, 曳式波于南坡发展, 而导(曳)式波于南(北)坡减弱。

$$(5) \frac{\partial}{\partial T} \iint E dX dY = - g^* \iint m^2 C_y \alpha A_0^2 dX dY \text{ 该项的作用同文献[2], 主要是向南}$$

(北)传播的波动于地形的南(北)坡发展。

## 5 实例分析

1992年6月21日午后13时50分左右,一条飊线于张家口地区形成,然后自西北向东南方移动,延庆、昌平、门头沟先后发生冰雹,造成了数百万元的经济损失。

从08时北京和张家口的探空资料分析可知,地面至100hPa,两地的风向变化在WSW—NW之间,可近似认为京津和河北的北部地区盛行纬向西风气流;且张家口口的 $\Delta u_{200-850}$ 为30m/s,北京的 $\Delta u_{250-850}$ 为28m/s,在此较强的垂直切变之下,若其它条件合适,则可能形成强风暴。

13时30分左右,原位于42.5°N, 114°E附近的一弧状云移到张家口地区,与低层的能量锋区相结合,形成一“人”字型飊线。值得注意的是,飊线前方有4条回波强度在15dBz以上、自北向南强度依次减弱的对流回波带a, b, c, d, 它们基本相互平行,均出现在大马群山的南坡一侧(图1)。根据前面的理论分析,可认为这4条回波带是由惯性重力波在大马群山南坡一侧发展、因而激发对流云带,且越接近平原地区,地形坡度减小,波动发展的程度也减弱,最接近北京的第4条回波带最弱。虽然这4条对流云带没直接产生灾害性的天气,但它们对向东南移动的飊线的强度变化产生影响。此后,飊线以平均速度为50km/h继续向南移动,当它在移动过程中分别与上述4条回波带重叠时,强度增强,出现冰雹;而当飊线移至两回波之间的晴空区时,强度减弱,只产生雷阵雨天气。20—21时之间,飊线消失于渤海。

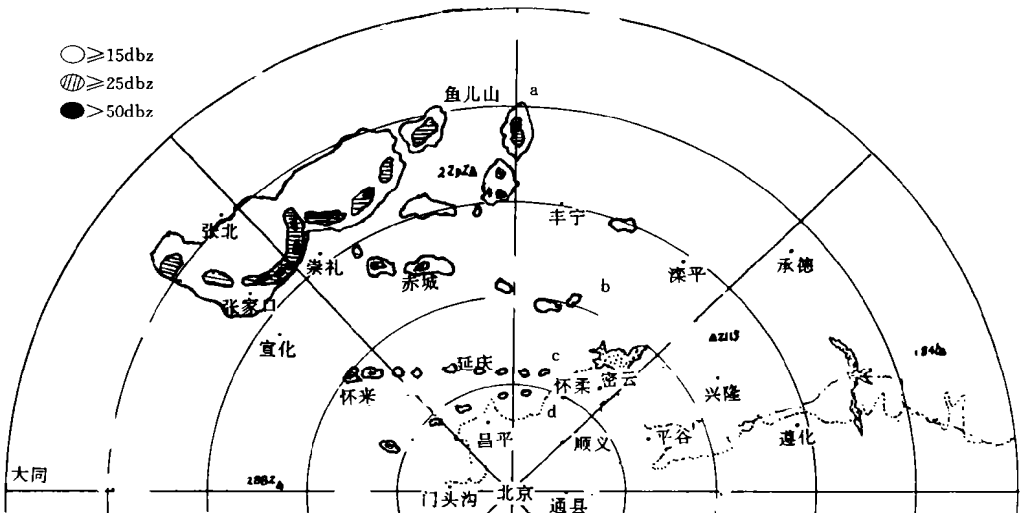


图1 1992年6月21日13时30分 Doppler 雷达的 PPI

从以上分析可知,向南传播的惯性重力波于大马群山的南侧发展,结果在波峰处激发出相互平行的对流云带。当飊线与对流云带重合时增强,而移至两云带间的晴空区减弱,使得飊线的移动表现为跳跃性。这也许可以给飊线的临近预报提供一种思路。

## 6 结 语

文中采用分层浅水波方程和 WKB 方法, 主要讨论了基流的垂直切变和地形对惯性重力波稳定性与发展的影响, 并试图解释发生在京津冀的一次飑线演变与惯性重力波的关系, 为飑线预报提供一种方法。

## 参考文献

- [ 1 ] 吕克利. 地形对低空地转气流上重力惯性波稳定性的影响. 大气科学, 1986, 10( 2): 220—224.
- [ 2 ] 吴池胜. 地形对重力惯性波发展的影响. 大气科学, 1994, 18( 1): 81—85.
- [ 3 ] 刘式适, 刘式达. 大气动力学. 北京: 北京大学出版社, 1991. 234—236.
- [ 4 ] Zeng Qing-cun. The development characteristics of quasi-geostrophic baroclinic disturbances. Tellus, 1983, 35A ( 5): 337— 349.

# THE EFFECT OF THE VERTICAL SHEAR OF BASIC FLOW AND TOPOGRAPHY ON THE DEVELOPMENT OF INERTIA GRAVITATIONAL WAVES

Wu Hong Lin Jinrui

(*Department of Atmospheric Sciences, Beijing Institute of Meteorology, Beijing, 100081*)

## Abstract

By using the shallow-water equations and WKB methods, the stability and development of the inertia gravitational waves are discussed in effects of the vertical shear of basic flow and the topography with west-east direction. According to the conclusions, the relationship between squall line's varying and the wave's development are tried to illustrated, which happened in the area of Beijing-Tianjin-Hebei on June 21, 1992. It may provide a few thinkings for forecast the squall line.

**Key words:** The inertia gravitational waves, Vertical shear, Topography.