

## 两种变时间步长的显式差分算法<sup>①</sup>

董加瑞 季仲贞

(LASG, 中国科学院大气物理研究所, 北京, 100080)

### 摘 要

针对一类大气、海洋问题,从算子方程出发,在显式完全平方守恒差分格式的基础上提出两种变时间步长的差分算法,使数值计算更加有效。在人工调节时间步长法中,通过人为控制方程中算子能量变化的办法调整时间步长;在自动调节时间步长法中,通过数值试验自动比较出所构造差分格式稳定性的好坏,将它与泰勒展开法及分解算法进行混合应用,验明了自动调节时间步长法具有综合判断差分格式好坏的功能,并得出一些有意义的结论。

**关键词:**变时间步长法,人工调节时间步长法,自动调节时间步长法,算子能量,完全平方守恒。

### 1 引言

构造出完全平方守恒的差分格式<sup>[1]</sup>是克服差分计算不稳定的重要方法之一。那么在众多的守恒差分格式中哪一个的效果会更好呢?以往很多学者作过这方面的探讨,一般是从差分算子的计算精度方面来考虑,譬如考虑用差分算子代替微分算子的截断误差大小等等。更多的工作是通过分析差分格式的稳定性,用稳定性判据去确定格式的好坏。格式的稳定性判据大多具有 $\tau_1 \leq c_1, \tau_2 \leq c_2$ 等形式,但若我们知道了 $c_1 > c_2$ ,往往不能就确定第一种差分格式的计算稳定性更好。因为在寻求判据时一般做了适当的放大, $\tau_1, \tau_2$ 在计算中可能取不到 $c_1, c_2$ ,所以很难用这种方法精确地比较出两个差分格式的好坏。本文提出了人工调节时间步长法,用不同时段算子能量的大小去判断格式在各时段的稳定性,这比用一个固定判据去衡量格式的稳定性更客观、更灵活、更进一步的。本文提出的自动调节时间步长法可对一个差分格式构造的好坏进行综合评价,因为造成差分格式计算不稳定的因素很多,譬如:在建立模式中的模型误差,观测误差或参量误差;在解题过程中的截断误差,舍入误差,结构误差等。本文在自动调节时间步长法中,利用积分若干步后的时间步长的稳定值去确定差分格式的好坏。这是一种试验性的方法,实践证明十分有效。

### 2 人工调节时间步长法原理及应用

考虑发展方程:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathcal{L}F = 0 \quad (1)$$

<sup>①</sup> 1993年7月5日收到原稿,1993年11月11日收到修改稿。得到国家攀登计划项目部分资助。

及相应的显式完全平方守恒差分格式<sup>[2]</sup>:

$$\frac{F^{n+1} - F^n}{\tau} + LF^n + \varepsilon_n \tau BF^n = 0 \quad (2)$$

这里  $L$  为与微分算子  $\mathcal{L}$  相容的空间差分算子,  $B$  为耗散算子,  $\varepsilon_n$  为耗散系数。

$$\varepsilon_n = \frac{K_1}{1 - \frac{\tau}{\Delta x} K_2 + \sqrt{(1 - \frac{\tau}{\Delta x} K_2)^2 - (\frac{\tau}{\Delta x} K_3)^2}} \quad (3)$$

其中:

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\|LF^n\|^2}{(BF^n, F^n)} \\ K_2 = \frac{(BF^n, LF^n)\Delta x}{(BF^n, F^n)} \\ K_3 = \frac{\|LF^n\| \cdot \|BF^n\| \Delta x}{(BF^n, F^n)} \end{cases} \quad (4)$$

性质:

设  $L$  为反对称的空间线性差分算子, 则:

(1)

$$(F^n, LF^n) = 0 \quad (5)$$

$$(LF^n, L^2F^n) = 0 \quad (6)$$

.....

(2)

$$(F^n, L^2F^n) = - \|LF^n\|^2 \quad (7)$$

$$(LF^n, L^3F^n) = - \|L^2F^n\|^2 \quad (8)$$

.....

推论: 若取:

$$BF^n = \frac{L\tilde{F}^{n+1} - LF^n}{\tau} \quad (9)$$

且:  $\tilde{F}^{n+1} = F^n - \tau LF^n$ , 则当  $L$  反对称时有下列结论成立:

①

$$(LF^n, BF^n) = 0 \quad (10)$$

$$(BF^n, F^n) = \|LF^n\|^2 \quad (11)$$

②

$$\frac{\|LF^n\|}{\|BF^n\|} \leq \frac{\|F^n\|}{\|LF^n\|} \quad (12)$$

③ 相应的式(3), (4)可简化为:

$$\varepsilon_n = \frac{K_1}{1 + \sqrt{1 - (\frac{\tau}{\Delta x} K_3)^2}} \quad (13)$$

$$\begin{cases} K_1 = \frac{\|LF^n\|^2}{(BF^n, F^n)} = 1 \\ K_3 = \frac{\|LF^n\| \cdot \|BF^n\| \Delta x}{(BF^n, F^n)} = \frac{\|BF^n\| \Delta x}{\|LF^n\|} \end{cases} \quad (14)$$

**定理 1:** 设  $L$  是反对称空间线性差分算子, 且  $BF^n$  的取法同式(9), 则对于任意一个  $\tau$ , 相应存在一个  $\tau_c$  满足下式:

$$\tau_c = \frac{\sqrt{2\varepsilon_n - 1} \|L^2F^n\|}{\varepsilon_n \|L^3F^n\|} \quad (15)$$

当  $\tau > \tau_c$  时, 算子能量是增加的; 当  $\tau < \tau_c$  时, 算子能量是减少的。

**证明:**

由公式(2)得:

$$\begin{aligned} F^{n+1} &= F^n - \tau LF^n - \varepsilon_n \tau^2 BF^n \\ &= F^n - \tau LF^n + \varepsilon_n \tau^2 L^2F^n \end{aligned}$$

故:  $LF^{n+1} = LF^n - \tau L^2F^n + \varepsilon_n \tau^2 L^3F^n$

$$\begin{aligned} \|LF^{n+1}\|^2 &= \|LF^n\|^2 + \tau^2 \|L^2F^n\|^2 + \varepsilon_n^2 \tau^4 \|L^3F^n\|^2 + 2\varepsilon_n \tau^2 (LF^n, L^3F^n) \\ &= (1 - 2\varepsilon_n) \|L^2F^n\|^2 \tau^2 + \varepsilon_n^2 \tau^4 \|L^3F^n\|^2 + \|LF^n\|^2 \end{aligned}$$

(A) 设算子能量是增加的, 即:  $\|LF^{n+1}\|^2 > \|LF^n\|^2$  则有:

$$(1 - 2\varepsilon_n) \|L^2F^n\|^2 \tau^2 + \varepsilon_n^2 \tau^4 \|L^3F^n\|^2 > 0$$

由式(13), (14)显然有  $\varepsilon_n > 1/2$  成立。所以:

$$\tau > \frac{\sqrt{2\varepsilon_n - 1} \|L^2F^n\|}{\varepsilon_n \|L^3F^n\|} = \tau_c \quad (16)$$

(B) 设算子能量是减少的, 即:  $\|LF^{n+1}\|^2 < \|LF^n\|^2$  同样有:

$$\tau < \frac{\sqrt{2\varepsilon_n - 1} \|L^2F^n\|}{\varepsilon_n \|L^3F^n\|} = \tau_c \quad (17)$$

对于每一步计算, 给定一个  $\tau$  可求出相应的  $\varepsilon_n$  并进一步求出  $\tau_c$ , 然后可利用式(16)、(17)来确定算子能量的变化。

讨论式(13), 为保证差分格式(2)能稳定地计算下去, 有下式成立:

$$\Delta = 1 - \tau^2 \frac{\|BF^n\|^2}{\|LF^n\|^2} \geq 0$$

$\therefore$

$$\tau \leq \frac{\|LF^n\|}{\|BF^n\|} \leq \frac{\|F^n\|}{\|LF^n\|} \quad (18)$$

因为格式(2)具有完全能量平方守恒的特性, 故:  $\|F^n\| = c$  (常数), 这里  $\frac{c}{\|LF^n\|}$  相当于平均尺度, 从式(18)可以看出, 时间积分步长受限于系统的空间平均尺度。由式(18)得:

$$\tau \|LF^n\| \leq c \quad (19)$$

一般,可以把  $\|LF^n\|^2$  定义为算子能量,下面为了方便起见不妨就把  $\|LF^n\|$  称为算子的能量,式(19)建立了时间步长和算子能量的一个反比关系,它是人工调节时间步长法的基础。

当  $\tau$  取为某一个定值  $\tau_1$  时,算子能量就有一个界限  $\frac{c}{\tau_1}$ ,若超过这个限度就有:  $\Delta < 0$ , 从而导致计算不稳定现象。此时虽然算子能量超过了  $\tau_1$  下的限度,若我们缩短时间步长到  $\tau_2$ ,那么算子的能量限就会提高到  $\frac{c}{\tau_2}$ ,由  $F^n$  算出的  $\|LF^n\|$  在没有超过第二个限度  $\frac{c}{\tau_2}$  的情况下  $\Delta > 0$  仍然成立,计算稳定性仍然保持,以  $\tau_2$  迭代计算若干步后算子能量逐步减小(见定理 1),当减小到第一限度后,仍采用时间步长  $\tau_1$  进行积分运算。这样,当算子能量满足:  $\|LF^n\| \leq \frac{c}{\tau_1}$  时,以  $\tau_1$  进行迭代运算,当算子能量满足:  $\frac{c}{\tau_1} < \|LF^n\| \leq \frac{c}{\tau_2}$  时,以  $\tau_2$  ( $\tau_2 < \tau_1$ ) 进行迭代运算,该方法称为人工调节时间步长法。如此可以人为地选取多个时间段进行积分运算。

表 1

算子能量的控制限 XX	1.81	1.82	1.825	1.875	1.9	1.85				
小时间步长(s)	240	240	240	240	240	240	240	240	240	240
大时间步长(s)	480	480	480	480	480	480	360	400	460	500
积分 1d 的 CPU 时间(s)	42.5	42.5	42.6	42.8	43.1	42.3	43.5	43.1	43	42.7

使用球面正压原始方程模式取 4 波的 Rossby-Haurwitz 波在北半球区域内进行数值试验,网格距为:  $\Delta\lambda = \Delta\theta = \frac{2\pi}{80}$ , 可得如下表 1 中所列的结果。

从表 1 中可以看出,使用人工调节时间步长法,当算子能量的控制限为 1.85 时,并且大、小时间步长分别为 480s、240s 时,积分所需的时间最短,积分 1d 所需的 CPU 时间为 42.3s,与没有使用变时间步长法积分 1d 需 CPU 时间 51.75s 相比在计算量上节省了 18%。图 1 是用人工调节时间法进行 5d 的数值计算结果,从图中看出波形基本保持不变,位相移速与真解接近。

由试验还可以知道,当 xx 超过 2.0 时就会出现不稳定现象。图 2 给出了算子能量随积分步数的变化曲线,实线的部分代表取大时间步长的积分运算,虚线代表取小时间步长的积分运算。由图 2 可以看出图象呈锯齿形,它表明了人工调节时间步长法的可行性。

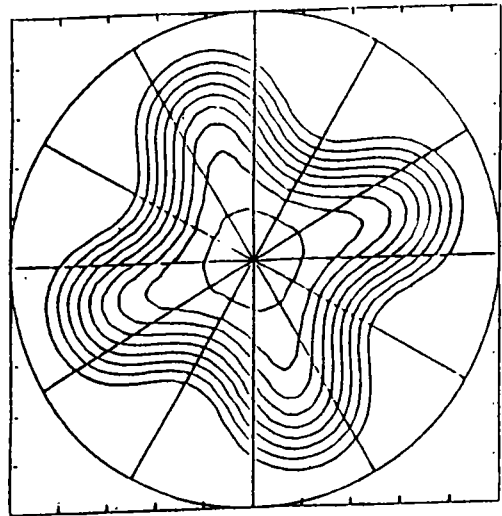


图 1 计算的 R-H 波(5d)

### 3 自动调节时间步长法原理

引理 引入函数:

$$y = a\tau^2 - 2b\tau + c \quad (20)$$

为了保证显式完全平方守恒差分格式(2)的计算稳定性,必须满足  $y \geq 0$ , 其中:

$$\begin{cases} a = (BF^n, LF^n)^2 \\ - \|BF^n\|^2 \cdot \|LF^n\|^2 \\ b = (BF^n, F^n)(BF^n, LF^n) \\ c = (BF^n, F^n)^2 \end{cases} \quad (21)$$

证明: 由式(2)得:

$$F^{n+1} = F^n - \tau LF^n - \epsilon_n \tau^2 BF^n$$

$$\begin{aligned} \|F^{n+1}\|^2 &= \|F^n\|^2 + \tau^2 \|LF^n\|^2 + \epsilon_n^2 \tau^4 \|BF^n\|^2 - 2\tau(F^n, LF^n) \\ &\quad - 2\epsilon_n \tau(F^n, BF^n) + 2\epsilon_n \tau^3(LF^n, BF^n) = \|F^n\|^2 \end{aligned}$$

上式整理得:

$$\epsilon_n^2 \tau^2 \|BF^n\|^2 - 2\epsilon_n[(BF^n, F^n) - \tau(BF^n, LF^n)] + \|LF^n\|^2 = 0 \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Delta &= 4\{[(BF^n, F^n) - \tau(BF^n, LF^n)]^2 - \tau^2 \|BF^n\|^2 \cdot \|LF^n\|^2\} \\ &= 4\{\tau^2[(BF^n, LF^n)^2 - \|BF^n\|^2 \cdot \|LF^n\|^2] - 2\tau(BF^n, F^n)(BF^n, LF^n) + (BF^n, F^n)^2\} \\ &= 4\{a\tau^2 - 2b\tau + c\} = 4y \end{aligned}$$

要保证差分格式(2)的计算稳定性,必须满足  $\Delta \geq 0$ , 所以有  $y \geq 0$  成立。

定理 2: 在引理中, 当  $y = 0$  时, 计算出来的时间步长的最大值  $\tau_{max}$  总是大于零的。因此自动调节时间步长法是可行的。

证明: 当  $y = 0$  时, 式(3)变成:

$$\epsilon_n = \frac{(BF^n, F^n) - \tau(BF^n, LF^n)}{\tau \|BF^n\|^2} \quad (23)$$

当算子  $B$  为正定时,

$$\tau_{max} = \frac{(BF^n, F^n)}{(BF^n, LF^n) + \|BF^n\| \cdot \|LF^n\|} \quad (24)$$

当算子  $B$  为负定时,

$$\tau_{max} = \frac{-(BF^n, F^n)}{(BF^n, LF^n) + \|BF^n\| \cdot \|LF^n\|} \quad (25)$$

又因为:  $(BF^n, LF^n) + \|BF^n\| \cdot \|LF^n\| > 0$ , 由式(24)、(25)都可以得出:  $\tau_{max} > 0$  成立。因此自动调节时间步长法是可行的。

用式(24)或式(25)计算出  $\tau_{max}$ , 再用式(23) 计算出  $\epsilon_n$ , 同时代入式(2) 就可以算出下一个时刻的预报值  $F^{n+1}$ 。

推论: 若取  $BF^n$  如式(9), 则式(20)变为:

$$y = -\tau^2 \|BF^n\|^2 \cdot \|LF^n\|^2 + (BF^n, F^n)^2 \quad (26)$$

最大时间步长为:

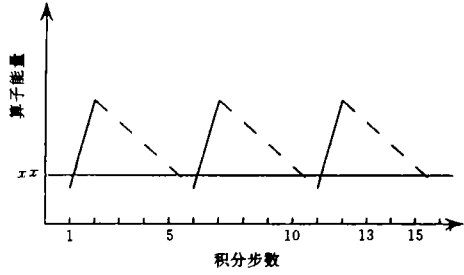


图 2 算子能量随积分步数变化曲线趋势 (实线代表取大时间步长积分的阶段; 虚线代表取小时间步长积分的阶段; ×代表人为规定的能量限)

$$\tau = \tau_{max} = \frac{|(BF^n, F^n)|}{\|BF^n\| \cdot \|LF^n\|} = \frac{\|LF^n\|}{\|L^2F^n\|} \tag{27}$$

由文献[3]知,显式完全平方守恒差分格式的计算稳定性条件是:

$$\tau' \leq \frac{\|LF^n\|}{\|BF^n\|} = \frac{\|LF^n\|}{\|L^2F^n\|} = \tau_{max} \tag{28}$$

由式(27)、(28)知,自动调节时间步长法的积分时间步长  $\tau$  值始终处于保持格式计算稳定的最大限度上。因此用这种办法可以提高计算效率,节省了计算时间。在试验中发现了一个有趣的现象,利用自动调节时间步长法进行计算时,在迭代约 20 步以后,时间步长自动稳定在某个值附近,但不同的格式其稳定值不同(见图 3)。我们正是利用这个稳定值来综合评价一个差分格式的好坏的。

### 4 自动调节时间步长法的应用

这里包括四种方法:(1)泰勒展开法(代号为 T)——对发展方程的时间差分项进行 Taylor 展开,并截取不同的阶数进行试验,结果见表 2 中的第 2、3 行,通过提高时间差分项的截断误差精度来增强差分计算的稳定性,从而提高了时间效益。详见文献[3]。(2)自动调节时间步长法(代号为 Z);(3)原始分解算法(代号为 F1)——只是将代表天气过程的适应项和演变项分解开并采用不同的时间步长进行计算的方法;(4)区域“扣除-补偿”法(代号为 F2)——是原始分解算法的一种推广应用。它是针对极地附近纬向网格距小对差分计算的稳定性影响很大这一现象提出的一种计算方法。具体作法是在远离极地的带状区域内使用分解算法,而在靠近极地的区域内用高阶内差法进行补偿计算。试验结果见表 3 的第 2、3 行,从结果可以看出有良好的经济效益。详见文献[4]。

在以下表 2—5 中:A 代表舍入误差;B 代表截断误差;C 代表结构误差——引入分解算法调整方程结构进行计算而引入的误差;D 代表区域扣除误差——由于扣除极地附近区域而使通过通量方法计算出的北极点的高度场产生的误差。

表 2 泰勒展开法和自动调解时间步长法的混合应用

泰勒展开的阶数	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶	误差情况
在“T”下的最大时间步长(s)	120	240	390	450	360	A, B
在“T”下的积分 1d 需 CPU 时间(s)	73.7	51	41	43	73	
在“T+Z”下的稳定积分时间步长(s)	139	285	350	312	300	A, B
在“T+Z”下的积分 1d 需 CPU 时间(s)	61.7	41.2	40.5	54.3	67.3	

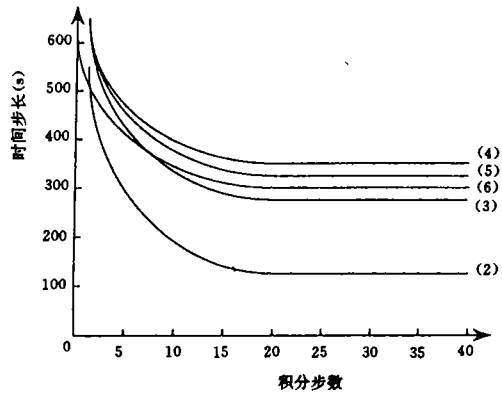


图 3 在自动调节时间步长下的稳定时间步长随积分步数的变化关系  
(图中数字 2,3,4,5,6 分别表示二阶,三阶,四阶,五阶,六阶泰勒展开下的时间步长变化)

这里先就各种误差的作用作一简单的分析。判断一个差分格式构造得好坏首先要看

它是否与相应的微分方程逼近,这就涉及用差分算子代替微分算子的精度问题,若截断误差的阶数越高,那么差分算子代替微分算子的精度就越高,然而对于一个差分格式而言就不是这种简单的正相关关系,因为进行积分运算时往往需要进行迭代,而且阶数越高时积分一步所需的迭代次数就越多,在迭代过程中引入的舍入误差及其传播会直接影响计算精度,从而影响了计算的稳定性。除此之外还有结构误差和区域扣除误差等等。所以判断一个差分格式构造得好坏应将各种误差进行综合考虑。

泰勒展开方法,提高了差分算子逼近微分算子的截断误差的精度,但随阶数的增高,迭代次数增加,其舍入误差的扩散范围也不断增大。原始分解算法,因引入了结构误差而降低了差分格式的稳定性。区域“扣除-补偿”法,引入了区域扣除误差,但避开了极区附近纬向格距过小所导致的不协调现象,即避免了在极区附近舍入误差的扩大。

从表 2 的第 4 行可以看出,四阶近似的积分时间步长的稳定值为 350s,比其他各阶近似的都大,而且它的积分时间为 40.5s 也是最少的,所以在泰勒展开的各阶近似中以四阶展开的稳定性最好,对于五阶近似在没有使用变时间步长法时积分的时间步长为 450s,由于比四阶近似多迭代一步,使舍入误差的扩散掩盖了由于提高截断误差精度所带来的好处,其时间步长稳定值降到 312s,所以从总体效果来看,五阶近似虽然截断误差的精度较高,但综合舍入误差和截断误差来考虑,它不如四阶近似的稳定性好。对于低阶近似(二阶,三阶),由于本身的截断误差很大,所以其效果均明显不如四阶近似。

表 3 区域“扣除-补偿”法和自动调解时间步长法的混合使用

积分区域	整个北半球	0—82°N	0—77.5°N	0—73°N	0—68.5°N	0—64°	误差情况
		带状区域	带状区域	带状区域	带状区域	带状区域	
在“F2”下的纬向气 压梯度力项的最 大时间步长(min)	4	9.5	14	18	19	17.5	A,B,C,D
在“F2”下积分 1d 需要的 CPU 时间(s)	60	24	14	12.5	11.4	12	
在“Z+F2”下的 稳定积分时间 步长(s)	277	421	548	670	785	890	A,B,C,D
在“Z+F2”下的 积分 1d 需 CPU 时间(s)	36	23.3	18	14.7	12.7	10.7	

由表 3 可以看出,在区域“扣除-补偿”法中虽然积分时间步长能取到 18min 或 19min,但并不代表其稳定性就十分好。由表中第 4 行可以确定出计算效果的好坏,不难看到,其积分时间步长的稳定值随积分区域远离极地而增大,这说明了球坐标系中的极地奇异点对差分格式的计算稳定性影响很大。

比较表 4 的第 2 行和表 2 的第 4 行,使用分解算法后,相应的稳定积分时间步长均减小,原因是引入了结构误差使格式的稳定性相应减小而产生的现象。在表 4 的第 2 行中,比较各稳定时间步长得知在泰勒展开的各阶近似中以四阶格式最稳定。而计算的

CPU 时间三阶最少,为每天 35s。

表 4 泰勒展开法、原始分解算法及自动调解时间步长法的混合应用

泰勒展开的阶数	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶	误差情况
在“T+Z+F1”下的 稳定积分时间步长(s)	139	276	282	257	253	A,B,C
在“T+Z+F1”下的 积分 1d 需 CPU 时间(s)	51.7	35	42.8	55.3	67	

表 5 泰勒展开法、区域“扣除—补偿”法及自动调节时间步长法的混合应用

泰勒展开的阶数	二阶	三阶	四阶	五阶	六阶	误差情况		
在“Z+T+F2”下的稳定 积分时间步长(min)	整个北半球	139	240	282	257	252	A,B,C,D	
	0—82°N 带状区域	279	376	375	372	372		
	0—77.5°N 带状区域	410	500	500	500	500		
	0—73°N 带状区域	537	621	621	621	621		
	0—68.5°N 带状区域	665	740	740	740	740		
	0—64°N 带状区域	770	850	850	850	850		
	在“Z+T+F2”下的积分 1d 需 CPU 时间(s)	整个北半球	52	42	43	55		67
		0—82°N 带状区域	27	26.7	32.5	38.6		45
		0—77.5°N 带状区域	18.3	20	22	28.6		33
		0—73°N 带状区域	14	16	19	22		26
0—68.5°N 带状区域		11.4	13.3	16	19	21.5		
0—64°N 带状区域		9.9	11.3	13.8	15	18.5		

从表 5 中可以看出,在泰勒展开法、自动调节时间步长法和区域“扣除-补偿”法混合使用的情况下,对于积分区域为整个北半球和 0—82°N 带状区域的情形均以四阶泰勒展开式的稳定性最好,其时间步长稳定值分别为 280s 和 375s。而对其它扣除区域的情况,除了二阶近似外,积分时间步长的稳定值并没有随泰勒展开的阶数增高而增大。由此可以看出泰勒展开法对极地附近的计算精度影响较大,而对远离极地的区域影响不明显。据此,我们设想在极地附近使用高阶泰勒展开近似,在远离极地地区使用低阶近似,然后进行耦合计算,其效果会更佳。

## 5 结论

下面给出使用自动调节时间步长法所得的一些结论:



(1) 泰勒展开法的引入是通过提高差分算子的截断误差的精度来提高格式稳定性的。但高阶情况因舍入误差增长很快,影响了格式的稳定性。综合来讲,以四阶泰勒展开效果最好。

(2) 使用分解算法因引入了结构误差降低了差分格式的稳定性,但通过提高了平流项的时间步长又节省了计算时间。

(3) 使用区域“扣除-补偿”法引入了区域扣除误差,但它避开了极地附近因纬向网格距小导致方程中纬向气压梯度力项变大所产生的不协调现象,综合看来,还是增加了格式计算的稳定性。

(4) 从表 5 可以看出一个现象:泰勒展开只对极地附近区域作用大,而对 0—77.5°N 的带状区域影响很小。

### 参考文献

- [1] 季仲贞. 平方守恒型差分格式的构造. 中期数值天气预报文集. 北京:气象出版社, 1982.
- [2] 王斌, 季仲贞. 显式完全平方守恒差分格式的构造及其初步检验. 科学通报, 1990, 35(10): 766—768.
- [3] 董加瑞, 季仲贞. 改进的显式完全平方守恒差分格式构造及其检验. 自然科学进展, 1993, 3(1): 77—82.
- [4] 董加瑞, 季仲贞. 发展方程的一种经济的差分计算方法及其应用. 科学通报, 1993, 38(6): 531—533.

## TWO KINDS OF COMPUTATIONAL METHODS IN EXPLICIT DIFFERENCE SCHEME WITH VARIABLE TIME STEPS

Dong Jiarui Ji Zhongzhen

(*Institute of Atmospheric Physics, CAS, Beijing, 100080*)

### Abstract

Two kinds of computational methods in variable time steps are put forward, on the basis of explicit and complete square conservative difference scheme, which can make numerical computation more efficiently. The first one is the artificial method in adjusting to the time step, which can be realized by controlling the variation of operator energy in equation artificially. The automatic method in adjusting to the time step can give out whether the stability of difference scheme is good or not by numerical tests, and can be proved with the function that can synthetically judge the effect of difference scheme by the combined application with the method of Taylor expansion, and the splitting method. At last, some reasonable conclusions have been drawn out.

**Key words:** Method of variable time step, Artificial method in adjusting to the time step, Automatic method in adjusting to the time step, Operator energy, Complete square conservation.