

# 大尺度涡旋的正压不稳定\*

罗 哲 贤

(南京气象学院, 南京, 210044)

## 摘 要

用极坐标中线性化的正压涡度方程, 将大尺度圆形基流上扰动的稳定性问题化为广义特征值的问题, 得到了扰动振幅增长率沿方位角方向波数的关系。然后以不稳定模态的扰动流函数场作为初始场, 在强、弱两类圆形基流的条件下, 用直角坐标中准地转正压模式, 分别实施积分时间为 60h 的试验。结果在模式大气中, 初始扰动均随时间而增幅; 强圆形基流的扰动增幅更快, 并形成与台风螺旋云系看似有些相近的结构。

**关键词:** 正压不稳定, 大尺度涡旋, 圆形基流, 数值试验。

## 1 引言

在大尺度平直气流和波状气流上小扰动能否发展的稳定性问题, 已有大量研究。李崇银<sup>[1]</sup>对此曾有系统论述。在小尺度圆形涡旋气流上扰动的稳定性, 也有一些结果<sup>[2]</sup>。但涉及到大尺度圆形基流稳定性的工作尚不多见。另一方面, Holland<sup>[3]</sup>提出了数值计算的论据, 认为大尺度圆形涡旋与其外缘尺度较小系统的相互作用是引起台风大振幅摆动、偏离正常路径的一个物理原因。但文献<sup>[3]</sup>在初始场中直接给出了这些系统, 未分析其形成。本文认为, 这些系统的形成可能与圆形基流的不稳定性有些联系。从此角度而言, 对大尺度涡旋稳定性的研究, 将有助于加深对大尺度涡旋移动的科学认识。

## 2 圆形基流上扰动的线性正压不稳定

### 2.1 方程和计算步骤

取正压涡度方程

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \bar{V} \cdot \nabla (\nabla^2 \psi + f) = 0 \quad (1)$$

式中  $\psi(r, \theta, t)$  为地转流函数,  $r, \theta$  为极坐标的自变元,  $\bar{V}$  为水平速度矢量,  $f = 2\Omega \sin\varphi$  为柯氏参数。

将  $\psi$  和  $\bar{V}$  分为平均量和扰动量之和, 令

$$\begin{aligned} \psi &= \bar{\psi}(r) + \psi'(r, \theta, t) \\ \bar{V} &= \bar{V}_m(r) + \bar{V}'(r, \theta, t) \end{aligned} \quad (2)$$

\* 1993 年 5 月 13 日收到原稿, 1994 年 2 月 1 日收到修改稿。国家自然科学基金资助项目。

其中

$$\begin{aligned}\bar{V}_m &= V_\theta(r)\bar{i}_\theta \\ \bar{v} &= v_r(r,\theta,t)\bar{i}_r + v_\theta(r,\theta,t)\bar{i}_\theta\end{aligned}\quad (3)$$

$\bar{i}_r, \bar{i}_\theta$  为  $r, \theta$  方向的单位矢量。这里, 已令平均速度矢  $\bar{V}_m$  只是  $r$  的函数, 即  $\bar{V}_m$  描述的平均流场为圆形轴对称气流, 记为圆形基流。 $\psi'$  和  $\bar{v}$  是该圆形基流上的扰动。

将式(2)、(3)代入式(1), 略去扰动量的二次项, 得扰动流函数  $\psi'(r, \theta, t)$  满足的方程(略去“'”):

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + V_\theta(r) \frac{\partial \nabla^2 \psi}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \right) \\ + \delta_1 \left\{ V_\theta(r) \frac{\partial f}{r \partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial f}{r \partial \theta} \right\} = 0\end{aligned}\quad (4)$$

式(4)为圆形基流  $V_\theta(r)$  上扰动量  $\psi(r, \theta, t)$  随时间变化所遵循的约束。可见, 扰动量  $\psi$  的演变与圆形基流的径向风速分布  $V_\theta(r)$  有关。含  $\delta_1$  项源于  $\bar{V} \cdot \nabla f$ , 本文中令  $\delta_1 = 0$ 。关于柯氏力及扰动量二次项对圆形基流上扰动演变的影响, 已另文讨论<sup>[4]</sup>。

令

$$\psi(r, \theta, t) = \varphi(r) e^{i(n\theta - \sigma t)} \quad (5)$$

式中  $\varphi(r)$  为流函数扰动的振幅,  $n$  为扰动沿  $\theta$  方向的波数,  $\sigma$  为扰动的圆频率。 $\sigma$  取复根则圆形基流  $V_\theta(r)$  上扰动将不稳定。

式(5)代入(4), 得到关于扰动振幅  $\varphi(r)$  的方程

$$\begin{aligned}(nV_\theta(r) - r\sigma) \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left( \frac{n}{r} V_\theta(r) - \sigma \right) \frac{d\varphi}{dr} \\ - \frac{n^2}{r} \left( \frac{n}{r} V_\theta(r) - \sigma \right) \varphi - n \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{V_\theta}{r} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} \right) \varphi = 0\end{aligned}\quad (6)$$

式(6)的两个边界条件:  $r=0, \varphi=0; r=r_M, \varphi=0$ 。令  $r_M$  远大于  $R_M$ 。这里,  $R_M$  为圆形基流风速廓线上最大风速  $V_M$  处与涡旋中心的距离。

用差分方法将式(6)离散化。令  $d = r_M / (M - 1)$ , 以  $d$  为格距将区间  $[0, r_M]$  均匀划分, 得到  $M$  个结点, 记为  $j = 1, 2, \dots, M - 1, M$ 。 $j = 1$  时,  $r = 0$ ,  $j = M$  时,  $r = r_M$ 。将方程(6) 写在第  $2, 3, 4, \dots, M - 1$  个内点上, 得到(6)的差分形式:

$$\begin{aligned}\frac{1}{d^2} (nV_j - r_j \sigma) (\varphi_{j+1} - 2\varphi_j + \varphi_{j-1}) \\ - \frac{1}{2d} \left( \frac{n}{r_j} V_j - \sigma \right) (\varphi_{j+1} - \varphi_{j-1}) - \frac{n^2}{r_j} \left( \frac{n}{r_j} V_j - \sigma \right) \varphi_j \\ - \frac{n}{d^2} \left\{ \left( 1 - \frac{1}{2j_1} \right) V_{j-1} + \left( 1 + \frac{1}{2j_1} \right) V_{j+1} - \left( 2 + \frac{1}{j_1^2} \right) V_j \right\} = 0\end{aligned}\quad (7)$$

式中  $j = 2, 3, \dots, M - 1$ 。 $V_j$  为  $V_\theta(r)$  在第  $j$  个格点上的值。 $r_j = (j - 1)d, j = j_1 - 1$ 。 $\varphi_{j+1}, \varphi_j, \varphi_{j-1}$  分别为扰动振幅  $\varphi(r)$  在第  $j + 1, j, j - 1$  格点上的值。

式(7)中含有  $M - 2$  个未知函数  $\varphi_j (j = 2, 3, \dots, M - 1)$ , 同时有  $M - 2$  个方程。由式(7)可见, 这个方程组的系数包括两个部分, 一部分与波数  $n$ 、风速廓线  $V_j$  及格距  $d$  有关, 与圆频率  $\sigma$  无关。另一部分与圆频率  $\sigma$  有关。将前者归并为矩阵  $A$ , 后者归并为矩阵  $B$ 。

矩阵  $A, B$  的元素  $A_{ij}, B_{ij}$  不难从式(7)求出,这里从略。这样,式(7)可化为以下形式:

$$|A - \sigma B| \tilde{\varphi} = 0 \quad (8)$$

式中  $A, B$  为  $M - 2$  行,  $M - 2$  列的方阵;  $\tilde{\varphi}$  为  $M - 2$  行, 1 列的矩阵。圆形基流  $V_\theta(r)$  上扰动的正压稳定性问题, 归结为求方程(8)的广义特征值问题。

参数取值:  $M = 18, d = 40\text{km}, r_M = 680\text{km}, n = 3, 4, 5, \dots, 10$ 。

圆形基流的风速廓线取自 Chan 和 Williams<sup>[5]</sup>:

$$V(r) = V_m(r/r_M) \exp\{(1/b)(1 - (r/r_M)^b)\} \quad (9)$$

式中  $V_m$  为最大风速,  $r_M$  为出现最大风速处与涡旋中心的距离,  $b$  为形状参数。令  $b = 1$ 。

具体计算步骤如下:

(1) 由于矩阵  $B$  的主对角线元素均不为零, 故可对矩阵  $B$  求逆。求出逆矩阵  $B^{-1}$  后, 再求出矩阵  $C, C = B^{-1} \times A$ 。这样, 式(8)变为

$$|C - \sigma E| \tilde{\varphi} = 0 \quad (10)$$

这里  $E$  为单位矩阵。式(8)的广义特征值问题变为矩阵  $C$  的一般特征根问题。

(2) 由矩阵  $C$  求出关于  $\sigma$  的特征方程(16次方程)。

(3) 用 Graeffe 根平方法<sup>[6]</sup> 求出特征方程的方程导出系数, 初步判断该高次方程有无复根存在。

(4) 用劈因子法直接求解特征方程, 得到全部实根和复根。

(5) 确定复根虚部取值极大的模态, 即最不稳定的模态。再将该模态的特征根代入式(10), 求出最不稳定的模态的振幅值  $\tilde{\varphi}(r)$ 。

对于数值求解  $16 \times 16$  方阵的特征值而言, 足够的计算精度十分重要。为保证足够的精度, 计算过程中实施了如下验算:

(1) 矩阵求逆时, 求出  $B$  的逆矩阵  $B^{-1}$  后, 用原计算方案对  $B^{-1}$  再求逆一次, 得到矩阵  $D$ 。  $D$  应与  $B$  相等。对比  $D, B$  的元素, 一般精确到小数 4—5 位均相等。

(2) 求矩阵  $C$  的特征根时, 在求出 16 个特征根后, 分别计算  $S$  和  $\text{tr}C$ 。这里,  $S = \sum_{i=1}^{16} \sigma_i$ ,  $\text{tr}C = \sum_{i=1}^{16} C_{ii}$ ,  $C_{ii}$  为  $C$  的主对角线元素。  $S$  应与  $\text{tr}C$  相等(一般精确到小数 4 位左右两者相等)。

(3) 用劈因子法迭代求解高次方程时, 迭代初值与迭代精度选取不当也会引起较大误差。用两组不同的迭代初值计算, 求得的特征根的数值极为接近。用不同迭代精度值先做试算, 在继续提高迭代精度对结果的改进已无影响时, 选定该精度值正式计算时用。

(4) 求相应于特征根  $\sigma_0$  的特征向量时, 将  $\sigma_0$  与求出的特征向量代入(10)验算, 结果是正确的。

## 2.2 计算结果

在线性稳定性问题中, 最为关心的是特征方程是否具有复根。用 Graeffe 方法<sup>[6]</sup> 可以不需直接求解高次方程就可判断该方程是否具有复根。令  $V_m = 20.0\text{ms}^{-1}$ ,  $r_M = 200.0\text{km}$ ,  $n = 3, 4, \dots, 10$ 。对每个波数  $n$ , 分别求出矩阵  $C$  及其特征方程后, 再求出导出系数序列。结果: 对所有扰动波数而言, 在导出系数序列中, 均出现明显的符号波动现象。这意

味着,相应特征方程均具有复根。

接着,仍令  $V_m = 20.0 \text{ms}^{-1}$ ,  $r_M = 200.0 \text{km}$ ,  $n = 3, 4, \dots, 10$ 。对每个波数  $n$ , 用劈因子法直接求解特征方程, 得到全部实根和复根的数值解。结果: 对所有扰动波数而言, 相应特征方程确实均有复根, 并且均存在不止一对复根。这与上述 Graeffe 法的结果是一致的。在这些复根中, 选取虚部  $\sigma_i$  取值极大者作为最不稳定的模态。该模态的实部  $\sigma_r$  决定了扰动振动的频率, 该模态的虚部  $\sigma_i$  决定了扰动振幅增长的速率。最不稳定的模态的  $\sigma_r$ 、 $\sigma_i$  随扰动波数  $n$  的变化列于图 1。图 1 中  $\sigma_i$  的计算结果一般比较合理。如  $n = 3$  时,  $\sigma_i$  为  $2.5 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$ , 相应的  $e$  的折摺率为  $0.4 \times 10^4 \text{s}$ , 即经过 1.1h, 扰动振幅增大约  $e$  倍。该增长率比小尺度涡旋扰动增幅的速率要慢得多, 比非绝热条件下几千公里行星尺度气流不稳定增长率<sup>[7]</sup>又要快。注意到本文中圆形基流的特征尺度为 600km, 其空间尺度也在两者之间。

为了分析圆形基流强度与扰动稳定性的关系, 在  $r_M = 100.0 \text{km}$ ,  $n = 4, 6$  的情况下, 选取不同的圆形基流的最大风速  $V_m$ , 进行了 12 组计算。分别求出不同风速条件下最不稳定的模态的增长率  $\sigma_i$  (图 2)。可见: 圆形基流愈强, 扰动振幅的增长率愈大。相应于最不稳定的模态扰动振幅  $\varphi(r)$  的计算结果表明, 最不稳定的模态的扰动分布, 在圆形涡旋的外缘地带达到极大值。据此可推断, 与一般的中纬度气旋相比, 在台风外缘地带, 扰动可能更易发展。

概括而言, 若一个大尺度的气旋性涡旋具有式(9)描述的径向风速廓线, 则迭加在圆形基流上的小扰动往往是正压不稳定的。最不稳定的模态的扰动分布在涡旋外缘地带达到极大; 圆形基流愈强, 扰动振幅增长也愈快。

以上结果, 是从极坐标正压涡度方程出发, 将稳定性问题转化为特征根问题以后得到的。如果在一个数值模式中, 给出一个式(9)定义的圆形基流, 再迭加上一个不稳定模态的扰动场, 以此作为初值场实施时间积分, 那末, 这个初始扰动的振幅在模式大气中理应随时间增长, 并且基流愈强, 扰动振幅也理应增长更快。下面对此继续分析。

### 3 模式大气中不稳定模态扰动的演变

用于研究不稳定模态初始扰动演变的数值模式, 是一个  $\beta$  平面的准地转正压模式。计算区域为正方形, 边长 4000km, 水平格距 40km, 时间步长为 10min。以上求特征值问题在  $(r, \theta)$  平面上进行; 这里数值积分在  $(x, y)$  平面上进行。

本文实施了两组时间积分为 60h 的试验。圆形基流的风速廓线均由式(9)给出,  $r_M = 100.0 \text{km}$ 。

试验 1.  $V_m = 10.0 \text{ms}^{-1}$ ,  $n = 4$ ,  $A_M = 0.07$ 。  $A_M$  为扰动流函数场的最大值, 系无量纲量。这是弱涡旋稳定性的试验。

试验 2.  $V_m = 40.0 \text{ms}^{-1}$ ,  $n = 4$ ,  $A_M = 0.10$ 。这是强涡旋稳定性的试验。

在式(5)中, 令  $t = 0$ ,  $n = 4$ ,  $\varphi(r)$  用相应的最不稳定的模态的特征向量值代入, 并注意到了  $\varphi(r)$  的极大值为  $A_M$ 。据此计算出初始时刻的扰动流函数场  $\psi'(x, y, 0)$ 。在  $\psi'(x, y, 0)$  场上, 分别有 4 个高值中心和 4 个低值中心, 即沿  $\theta$  方向呈 4 波分布(图 3a, 3b)。将扰动流函数场与圆形基流的平均流函数场相加, 为初始时刻的流函数场  $\psi(x, y, 0)$ 。在  $\psi(x, y, 0)$  场上, 在圆形涡旋的外缘区域, 均存在较小尺度的系统。

计算过程中,每隔 6h 输出一次  $\psi'(x, y, t)$  和  $\psi(x, y, t)$ 。每个试验输出 22 张  $\psi'(x, y, t)$  和  $\psi(x, y, t)$  的分布图。分析这些场序列,可以看到扰动流函数场  $\psi'(x, y, t)$  和流函数场  $\psi(x, y, t)$  将如何演变。结果:(1)在扰动流函数  $\psi'(x, y, t)$  的场序列上,与初始扰动相比,扰动均随时间而增强,范围不断扩大。图 3c, 3d 分别给出了试验 1, 2 第 36h 的扰动流函数场。图 3c 与图 3a 相比,图 3d 与图 3b 相比,显然初始扰动均发展了。(2)圆形基流的强度不同,初始扰动发展的速率也不相同。相应于弱圆形基流的初始场扰动发展的速率慢(图 3c);相应于强圆形基流的初始扰动发展的速率快(图 3d)。这里的数值结果与上述求特征值问题时所得结果较为一致。

在试验 1, 2 中,圆形基流场均不随时间变化,但扰动流函数场  $\psi'(x, y, t)$  不断改变,使流函数场  $\psi(x, y, t)$  也不断改变。由于试验 1, 2 中扰动增长率不同,  $\psi(x, y, t)$  变化的速率也不同。图 4c, 4d 分别给出了试验 1, 2 中第 36h 的流函数场。图 4c 与图 4d 相比,有两点不同。第一,圆形涡旋外缘区域扰动的范围,强圆形基流时(图 4d)比弱圆形基流时(图 4c)时要更大一些。第二,试验 2 中,由于圆形涡旋外缘扰动振幅的增大,扰动范围向大涡旋中心的方向伸展(见图 3d),流函数场上,大涡旋的等值线也变得不光滑起来(图 4d)。这一现象在弱圆形基流的试验 1 中并不清楚(图 4c)。从现象上看,图 4d 上流函数的分布与观测到的台风螺旋云系有一些相似之处。我们知道,在实际大气中,在强烈发展的涡旋(如台风)外缘,往往可以观测到螺旋云系;而在风速较小的气旋外缘一般并不形成这类富有特征的现象。这些观测现象的成因十分复杂,这里的数值结果或许会有些启发。

#### 4 结果与讨论

在大尺度平直气流和波状气流上扰动发展的稳定性问题已有大量研究。但在大尺度圆形基流上扰动发展的的工作尚不多见。本文对此做了初步分析。结果指出,在给定基流风速廓线(见式(9))的条件下,不稳定模态的扰动场由高低值闭合中心相间的若干涡旋组成,它们的空间尺度较圆形基流涡旋要小,并且在空间上与圆形基流涡旋具有可分性。因

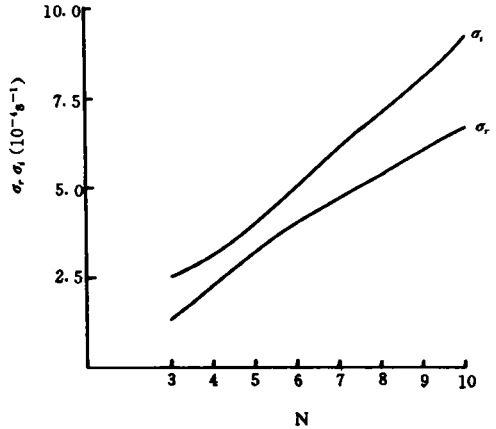


图 1 最不稳定模态  $\sigma_1, \sigma_2$  随扰动波数  $n$  的变化  
( $V_m = 20.0 \text{ m s}^{-1}$ ,  $r_M = 200.0 \text{ km}$ )

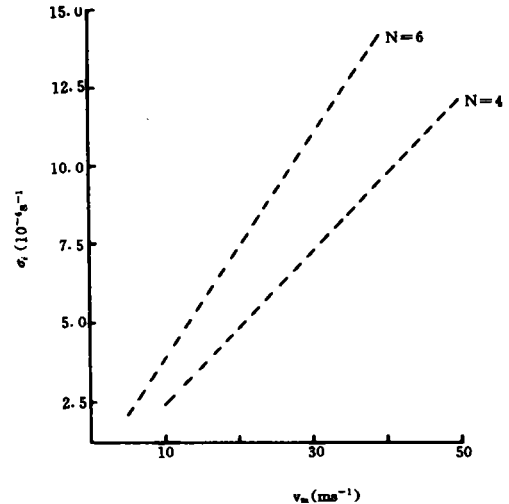


图 2 最不稳定模态增长率  $\sigma$  随  $V_m$  的变化  
( $r_M = 100.0 \text{ km}$ )

而,在大尺度圆形基流上扰动的稳定性与大尺度涡旋如台风外缘区域较小尺度系统的形成两者之间,可能存在着某种联系。

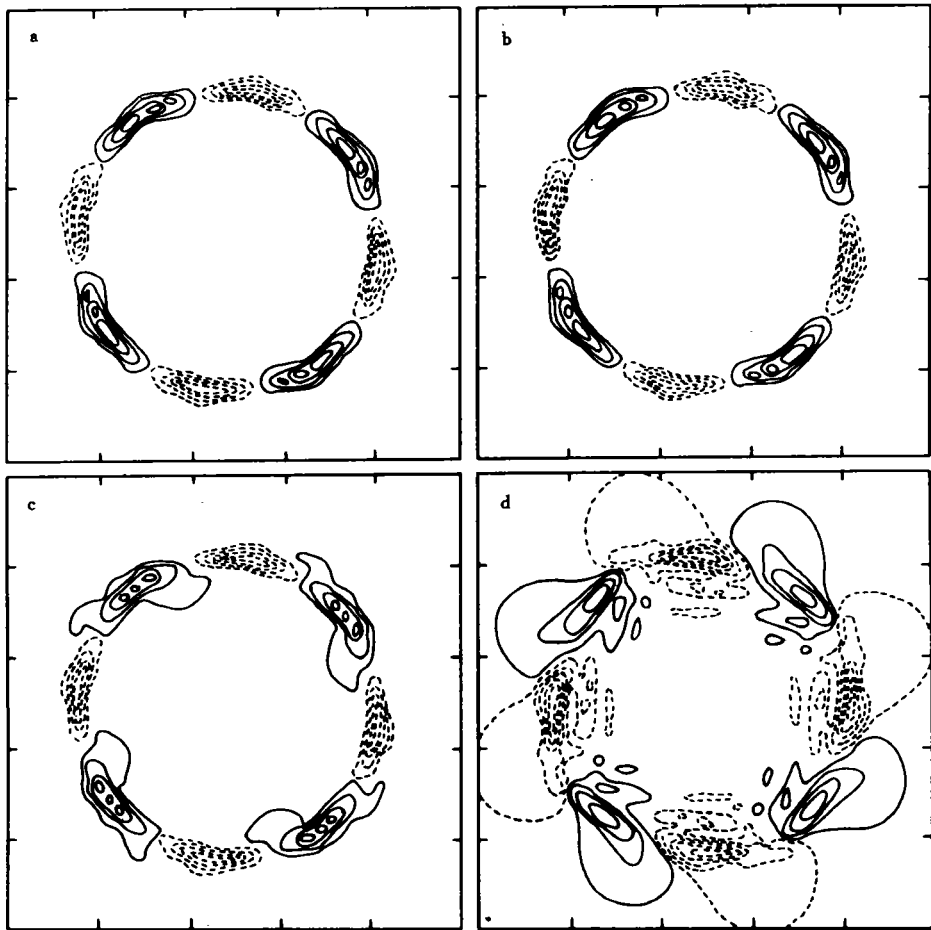


图3 试验1,2中,扰动流函数 $\psi(x, y, t)$ 的分布

(a,试验1,  $t=0$ ; b,试验2,  $t=0$ ; c,试验1,  $t=36\text{h}$ ; d,试验2,  $t=36\text{h}$ ;

图3a,3b,3c,3d等值线间隔分别为0.31,0.45,0.34,0.49 $\times 10^6\text{m}^2\text{s}^{-1}$ ,图框边长2000km)

在线性框架内关于稳定性问题的研究,一般将其转化为求特征值的问题,求出扰动振幅的增长率,即认为此问题已大致解决。本文将求特征值的问题与数值模式的时间积分结合起来。以不稳定模态的扰动场作为 $101\times 101$ 格点模式的初始场,经过时间积分,追踪不稳定模态扰动随时间的演变。得到了两者比较一致的结果。

在实际大气中,非线性过程对大尺度圆形涡旋及其外缘区域系统往往有着重要的作用。但是本文的分析和计算限于线性框架的范畴,因而与实际观测的结果会有不一致之处,如图1中 $\sigma_i$ 随波数单调增大等; $\beta$ 项对不稳定模态扰动演变的影响等亦未涉及,这些都需要继续研究。

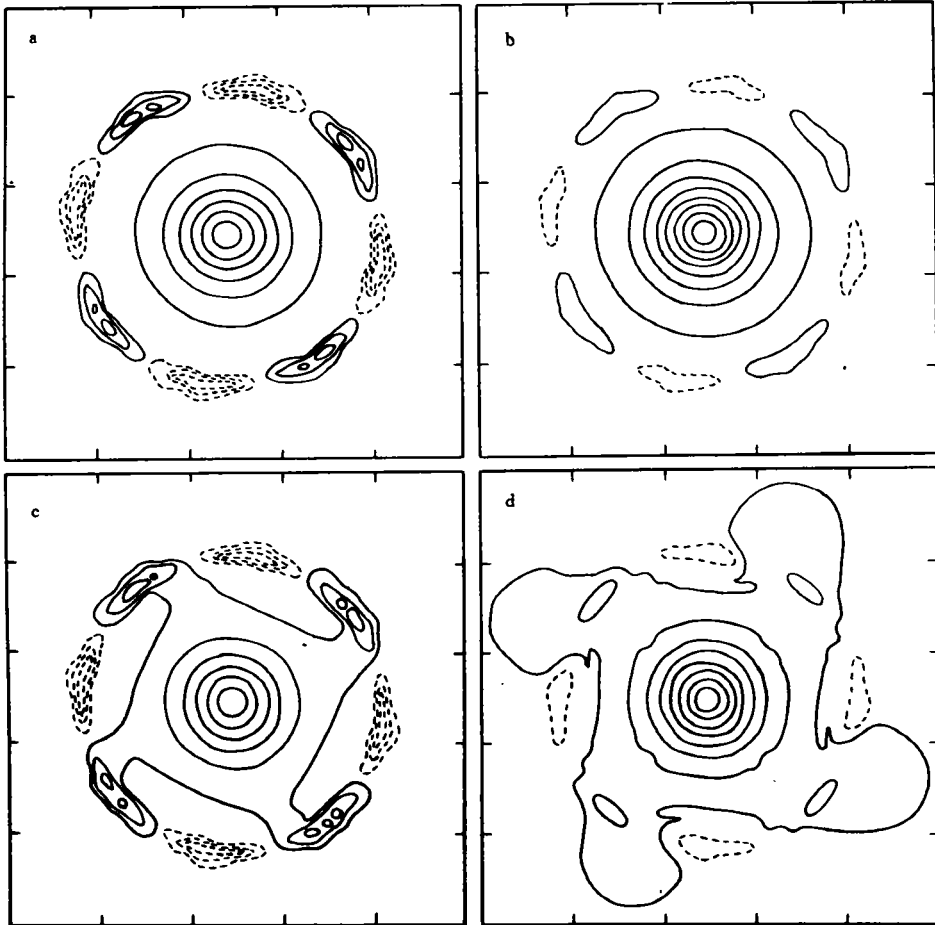


图 4 试验 1,2 中,流函数  $\psi(x, y, t)$  的分布

(a, 试验 1,  $t = 0$ ; b, 试验 2,  $t = 0$ ; c, 试验 1,  $t = 36\text{h}$ ; d, 试验 2,  $t = 36\text{h}$ ;

图 4a, 4b, 4c, 4d 等值线间隔分别为  $0.43, 1.34, 0.44, 1.40 \times 10^6 \text{m}^2 \text{s}^{-1}$ , 图框边长  $2000\text{km}$ )

## 参考文献

- [1] 李崇银. 不稳定性理论. 叶笃正等. 动力气象学. 科学出版社. 1988. 193—218.
- [2] Snow J T. On inertial instability as related to the multiple-vortex phenomenon. J Atmos Sci. 1979. 35: 1660—1677.
- [3] Holland G J et al. Contributions by mesoscale systems to the meandering motion of tropical cyclones. WMO/TD. 1991. 472: 62—82.
- [4] 罗哲贤. 边缘区域扰动演变对台风结构的影响. 大气科学. 1994. 18: 513—519.
- [5] Chan J C L and Williams R T. Analytical and numerical studies of the beta-effect in tropical cyclone motion. Part I: Zero mean flow. J Atmos Sci 1987. 44: 1257—1265.
- [6] 王福明等. 应用数值计算方法. 科学出版社. 1992. 90—103.
- [7] Mak M. On moist quasi-geostrophic baroclinic instability. J Atmos Sci. 1982. 39: 2028—2037.

# BAROTROPICAL INSTABILITY OF DISTURBANCES ON A LARGE CIRCLE VORTEX

Luo Zhexian

(*Nanjing Institute of Meteorology, Nanjing, 210044*)

## Abstract

The barotropical instability for smaller scale disturbances superimposed on a large scale circle parallel vortex is investigated numerically. The growth rates of the orders of  $(10^{-4} - 10^{-5}) \text{ s}^{-1}$  are found at azimuthal wave numbers between 3.0 and 10.0. Then the most unstable mode for the disturbances is taken as the initial streamfunction field of a quasi-geostrophic barotropical model and two numerical experiments whose integration times equal to sixty model hours are performed for more and less intense vortex, respectively. Results show that the initial small disturbances for the both all develop certainly and that vortex filaments exhibit in the edge of more intense vortex, which is somewhat similar to the observational phenomenon concerning the outer structure of tropical cyclone.

**Key words:** Barotropical instability, Large scale vortex, Circle parallel current, Numerical experiment.

1996年《气象学报》由季刊改为双月刊

经中国科协和中国气象局同意,并报请新闻出版署正式批准,《气象学报》从1996年元月起由季刊(每年出版4期)改为双月刊(每年出版6期)。

《气象学报》改变刊期是为了适应我国气象事业发展,科研技术专业队伍日益扩大及加速学术交流的需要。按照中国气象学会常务理事会第三次会议的要求,《气象学报》将以改刊期为契机,认真研究《学报》如何适应大气科学发展的形势和气象现代化建设的新需求,使《学报》更好地为气象事业发展服务。

《气象学报》改为双月刊后,出版量每年将增加1/2,从而为更多的科研论文提供了发表机会,这也必然缩短了来稿的出版周期。这是广大气象科技人员,尤其是《学报》作者所欢迎和热切期盼的。为了保证《气象学报》继续以高质量的学术论文奉献给读者,我们迫切希望得到广泛支持,欢迎气象及相关学科的科技人员来信来稿,以便使《气象学报》愈办愈好。

《气象学报》编辑部