

混沌系统的局域特征与可预报性*

李志锦 纪立人

(中国科学院大气物理研究所, 北京, 100080)

摘 要

讨论了混沌系统的时间和空间的局域特征。首先分析了研究时间和空间局域特征的必要性。接着引进了有限时间不稳定和局域时间不稳定的概念,并对有关的计算问题进行了研究。对 Lorenz 系统的具体计算表明,随着轨线在混沌吸引子上的演变,局域不稳定特征有很大的变化,相应误差的增长也有很大的变化。相应于误差迅速增长的轨线部分局限于很有限的相空间范围内,而且同误差增长缓慢的轨线部分占据的相空间区域截然可分。每一个例的可预报性依赖于轨线在相空间中所处的区域。混沌系统的这种局域特征可以是导致个例业务预报技巧之间有很大差别的主要原因。

关键词: 混沌系统, 局域特征, 可预报性。

1 引言

大气是一个混沌系统^[1,2],其演变对初值十分敏感。初值中很小的误差随着时间演变会不断增长,因此实际天气预报就会存在一个可预报上限。已有许多工作确定这个预报上限。其方法主要有两类。一类是确定模式大气的上限^[3-5],考虑模式大气相当于假定了模式是完全正确的,但可以考虑任意误差的增长。另一类是确定实际大气的上限。Lorenz^[6]首先研究了这一问题,他希望在大气历史演变中找到接近的状态,然后分析它们差异的扩大速率,从而估计实际大气的可预报性。尽管大气中没有很接近的状态,但他还是作了粗略的外推估计。后来人们利用单时间序列的嵌入方法重构动力系统相空间的技术,计算了观测时间序列的可预报性^[7,8]。虽然这些方法不同,得到的预报上限的估计也不完全一致,但还是存在一个相对稳定的估计,即约为两周。如果我们把可预报性概念提为逐日可预报上限的确定(称为经典可预报性),那么到目前为止它已基本完成了历史使命。

预报实践表明,个例与个例之间数值天气预报技巧有很大的差别^[9,10],那么要问这种差别是实际大气本质特征的反映还是由于模式的缺陷引起的?显然经典可预报性理论没有,也不可能回答这一问题。要回答这一问题必须研究混沌系统的局域特征。最近已有一些研究工作讨论了混沌系统有限时间内的误差增长^[11-13],发现有限时间内的误差增长可以远大于也可以远小于 Lyapunov 指数、Reny 熵等估计的误差增长。作者^[14]曾分析了误差增长的动力学机制,已认识到误差的增长速率随着轨线的演变而改变。因此个例与个例

* 1993年10月6日收到原稿,1993年12月29日收到修改稿。

之间的实际预报的预报技巧变化可能是由混沌系统存在局域特征所决定的,对于这一问题应该进行深入的研究。

本文引进了有限时间不稳定和局域时间不稳定概念刻划混沌系统的局域特征。并详细讨论了有关计算问题。对 Lorenz 系统的具体计算,揭示出混沌系统确实存在强烈的局域特征。

2 相空间局域混沌

在研究混沌系统局域特征之前,首先关心的问题是,在相空间中混沌是否可以同周期态和平衡态吸引子共存。要从理论上证明似乎不太可能,我们希望能通过具体计算来说明。

Lorenz 系统已经得到广泛的研究,例如见文献[15]的评述。如周知 Lorenz 系统为

$$\frac{dx}{dt} = \sigma y - \sigma x \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -bz + xy \quad (3)$$

这里取 $\sigma = 10, b = 8/3$ 。那么当 $r \leq 1$ 时,动力系统存在一个平衡态 $(0, 0, 0)$, 并且是一个稳定平衡态即所谓平衡态吸引子。当 $r > 1$ 时,动力系统存在三个平衡态: $(0, 0, 0), (\pm \sqrt{b(r-1)}, \pm \sqrt{b(r-1)}, r-1)$ 。其中 $(0, 0, 0)$ 是不稳定平衡态。而当 $1 < r \leq 24.74$ 时,其它两个平衡态是稳定的。当 $r > 24.74$ 时,三个平衡态都失去了稳定性,此时系统不再存在平衡态吸引子,而且研究表明系统进入了混沌,即所谓的奇怪吸引子。

现在的问题是,存在平衡态吸引子时,是否在一定的相空间区域内可以存在混沌。虽然直观上理解应该是可以共存的,但理论上并没有证明,也未见到这种混沌的实例。不过这里却给出了肯定的例子。取 $r = 24.0$, 此时系统存在两个稳定平衡态: $(\pm 15.17, \pm 15.17, 23.0)$ 。图 1 给出的是轨线演变在平面上的投影。取初值为 $(1.0, 2.0, 3.0)$ 时,由图 1a, b 可以清楚地看到轨线的演变是混沌的。其实这种演变同 $r = 28.0$ 时的所谓“标准 Lorenz 混沌吸引子”的演变相似。但是,当初值接近于平衡态时(图 1c, d)则轨线演变最终将进入平衡态吸引子。

为了进一步证实初值为 $(1.0, 2.0, 3.0)$ 的轨线演变是混沌的,我们对系统积分了更长时间,直到 200 个时间单位(相当于 10 万个积分步)。图 2 给出的是 1—200 时间单位内演变序列的功率谱,可以看到谱峰很宽,混沌特征十分明显。为了排除这是由于计算方法造成的可能,我们用不同的时间步长,不同的计算方案进行试验,结果完全是一致的。

在相空间中,由于混沌和平衡态吸引子的共存,意味着对平衡态的稳定性分析并不能揭示整个相空间的不稳定特征,在相空间的不同区域可以有完全不同的不稳定特征,必须对不稳定特征随具体轨线的演变所发生的变化进行分析,才能全面了解动力系统的不稳定性质。其次,从可预报性的角度讲,是否可预报此时完全依赖于初值,对某些初值可预报,而对另一些初值不可预报,可预报性问题也是一个初值问题。

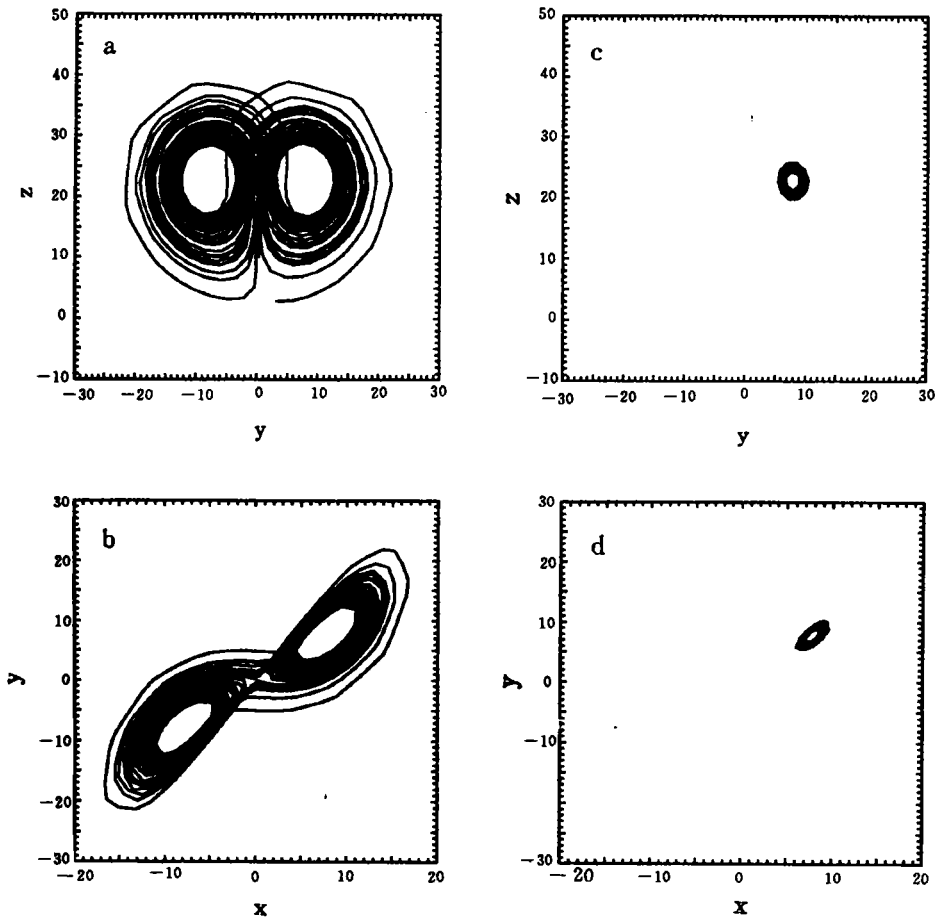


图1 $r = 24.0$ 时轨线演变,初值为(1.0,2.0,3.0)轨线在 $x-z$ 平面上和 $y-z$ 平面投影(a,b),初值为(7.0,7.0,20.0)的轨线(c,d)

上面讨论了相空间中存在不同性质吸引子的情形,下面将关心在混沌吸引子上是否还存在局域特征,以说明在吸引子的不同演变阶段可以具有不同的可预报时间。

3 混沌系统局域特征的数学表示

为了刻划混沌系统的性质,过去已提出了许多概念,如 Lyapunov 指数, Kolmogorov 熵以及分数维等,但这些概念都是表示混沌系统的全局性质,不能表示混沌系统的性质在相空间中的变化。要研究局域特征,必须引进新的概念。混沌的最基本特征之一是对初值的敏感性。下面我们将从这一特征出发引入有限时间不稳定和局域时间不稳定的概念。

考虑 N 维动力系统,状态矢量为 X , 其演变方程为

$$\frac{dX}{dt} = F(X) \quad (4)$$

设方程的某一解现实为 \bar{X} , 扰动为 X' 。取线性化扰动方程

$$\frac{dX'}{dt} = AX' \quad (5)$$

其中 A 是在 t 时刻 F 的 Jacobi。以下为了表示方便, 略去“'”号。式(5)有如下形式解

$$X(t) = S(t, t_0)X(t_0) \quad (6)$$

这里 $X(t_0)$ 是扰动初值, 而 $S(t, t_0)$ 是解转移阵。

引进内积

$$(x, y) = x^T D y = y^T D x \quad (7)$$

其中 x, y 表示两个矢量, 而 D 是正定对称阵。由内积引导的范数 $\|x\|^2 = (x, x)$ 可称之为广义能量。

记 $\sigma = \|X\| / \|X_0\|$, 它表示经过 $\Delta t = t - t_0$ 时间以后误差扰动的增长率。因此 σ 正是表示了对初值的有限时间敏感性, σ 越大表示对初值越敏感, 反之不敏感。

由式(6)可得

$$\|X\| = X_0^T S(t, t_0)^T D S(t, t_0) X_0 \quad (8)$$

记 $H = S(t, t_0)^T D S(t, t_0)$, 可以证明 H 是正定对称阵。引进广义特征问题

$$Hv = \lambda Dv \quad (9)$$

由于 D 是正定对称的, 因此有下列分解

$$D = LL^T \quad (10)$$

代入式(9)可以得到

$$(L^{-1}GL^{-T})(L^T v) = \lambda L^T v \quad (11)$$

其中 L^{-T} 表示 L 的逆的转置。记 $u = L^T v$, 则式(11)是关于 u 的一般特征值问题。由于 $L^{-1}GL^{-T}$ 是对称阵, 故存在特征向量 $u_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 在欧氏空间中组成一组完备正交基, 这里假设已归一化。又

$$v_i = L^{-T} u_i \quad (12)$$

从而

$$(v_i, v_j) = u_i^T L^{-1} D L^{-T} u_j = u_i^T u_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

故 $v_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 是内积空间中的一组完备正交基底。因此, 在内积空间中任一变量可以有完备展开

$$X = \sum_{i=1}^N \zeta_i v_i \quad (13)$$

其中 $\zeta_i = (X, v_i)$, 将式(13)代入式(8), 并注意到 $\|X\|^2 = \|\zeta\|^2$, 则有

$$\|X\|^2 = \zeta_0^T \Lambda \zeta_0 \quad (14)$$

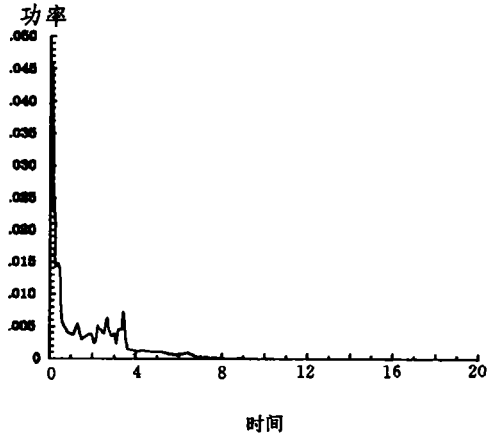


图2 1—200 时间单位内 y 分量时间演变功率谱

其中 $\zeta_0 = (\zeta_{01}, \zeta_{02}, \dots, \zeta_{0N})^T$, Λ 是由 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为对角元组成的对角阵。由式(14)可得

$$\sigma \leq \lambda_1 \quad (15)$$

其中 λ_i 是相应于 v_i 的广义特征值, 并已假设按 i 由大到小排列。上式中当且仅当 X_0 平行于 v_1 时等号成立, 此时 λ_1 即为广义扰动能量增长率。

定义在 $t - t_0$ 时间内广义扰动能量增加, 为有限时间不稳定。那么 $\lambda_1 > 1$ 时, 即为有限时间不稳定。显然 λ_1 越大, 轨线越不稳定, 意味着初始相近的轨线可能将更迅速地分离, 从而对初值越敏感。

在上述推导中, 其实已经给出了计算方法, 只要先求出 $S(t, t_0)$, 然后求出 λ_1 。一般当动力系统的维数比较低时, 可以通过积分线性方程(5) 求出 $S(t, t_0)$ 。不过, 当维数较高时这种方法需要很大的计算量, 此时需要采用专门的数学方法^[11, 12]。

下面我们来讨论时间局域不稳定。考虑矩阵方程

$$\frac{d}{dt} S(t, t_0) = AS(t, t_0) \quad (16)$$

并注意式(6), 可得到

$$\frac{d}{dt} \|X\|^2 = X^T(A^T D + DA)X \quad (17)$$

令 $C = A^T D + DA$, 则 C 是对称阵。引进广义特征值问题

$$Cv = \lambda Dv \quad (18)$$

由前面的证明可以知道存在特征矢量 $v_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 组成内积空间中一组完备正交基底。类似于前面的证明, 可以得到

$$\frac{d}{dt} \|X\|^2 = \zeta^T \Lambda \zeta \quad (19)$$

其中 $\zeta_i = (X, v_i)$, 即 X 在 v_i 方向的投影。从而有

$$\frac{d}{dt} \|X\|^2 = \lambda_1 \|X\|^2 \quad \text{当 } X \text{ 平行于 } v_1 \quad (20)$$

而且有

$$\frac{d}{dt} \|X\|^2 \leq \lambda_1 \|X\|^2 \quad (21)$$

上式中当且仅当 X 平行于 v_1 时, 等号成立。由式(21) 可知, 只要 $\lambda_1 > 0$, 误差就可以增长。因此称 $\lambda_1 > 0$ 时为局域时间不稳定。值得指出, 在文献[14]中证明了在很一般的条件下大气大尺度运动方程扰动非线性作用不影响误差增长率。实际上式(17)准确成立而不受小扰动假设的限制。

从上述的分析和推导可以看出, 有限时间不稳定和局域时间不稳定可以刻画混沌系统对初值敏感的局域特征。那么混沌系统是否存在有意义的局域特征呢, 下面将通过具体的个例计算来说明。

4 混沌系统的局域不稳定特征

这里通过 Lorenz 系统的个例, 来说明在混沌吸引子上, 无论是时间还是空间上都存

在强烈的局域特征。取 $\sigma = 10, b = 8/3, r = 28.0$, 此时系统得到所谓标准 Lorenz 奇怪吸引子。这里初值取为 $(1.0, 2.0, 20.0)$, D 取为单位阵。

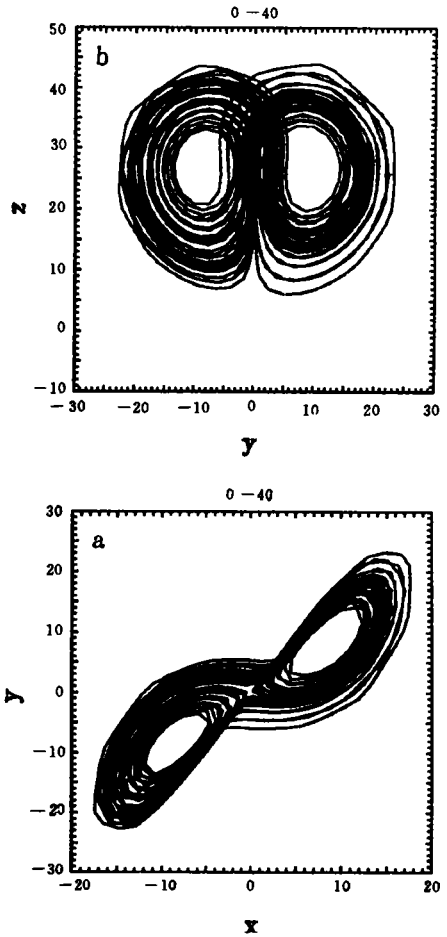
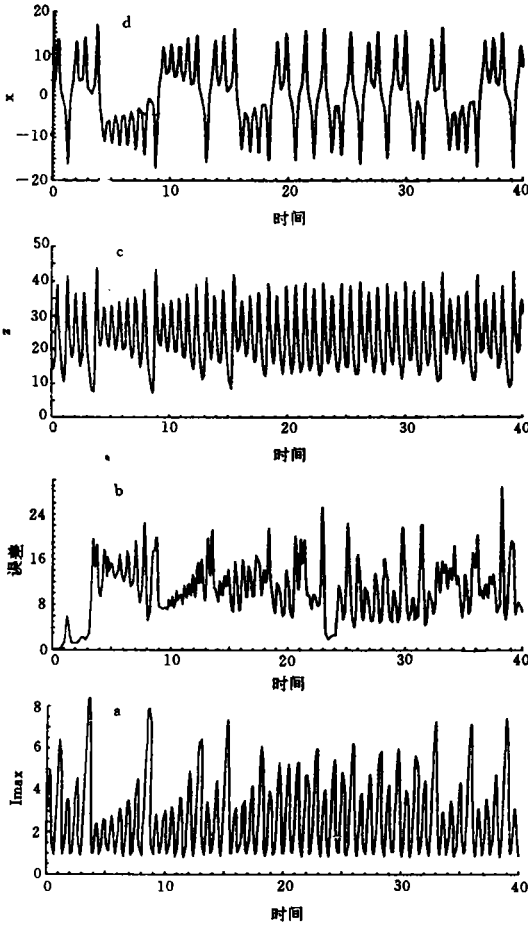


图3 时间演变, $t = 0.1$ 的有限时间不稳定指数(a), 误差演变(b)以及 z, x 分量的演变(c, d)

图4 $r = 28.0$, 初值 $(1.0, 2.0, 20.0)$ 轨线演变在 $x - y$ 平面(a)和 $y - z$ 平面上投影(b)

4.1 有限时间不稳定局域特征

首先讨论时间局域特征。取 $t_0 = 0, t = 0.1$ 。图3给出了有限时间不稳定指数 σ 的时间演变。同时给出了取初值为 $(1.2, 2.2, 20.2)$ 的轨线的误差均方差以及 z 和 x 分量的时间演变。从图3a可以看到, 在轨线的不同演变阶段有限时间不稳定指数变化很大。在最不稳定处可以达到7到8, 即在0.1时间单位内误差可以增加7到8倍, 而在小不稳定处其值近于1, 甚至小于1, 即误差不增甚至减少。比较图3b的误差演变, 可以看到只有轨线出现了强不稳定, 误差才迅速增长。一开始误差都保持较小, 而当位于时间3至4单位时间的强不稳定出现, 误差就急剧上升到饱和值。在以后的演变中, 因为误差已很大, 线性假定

不再成立。尽管如此,从图上还可以看到误差的极大值都对应着强不稳定的出现。

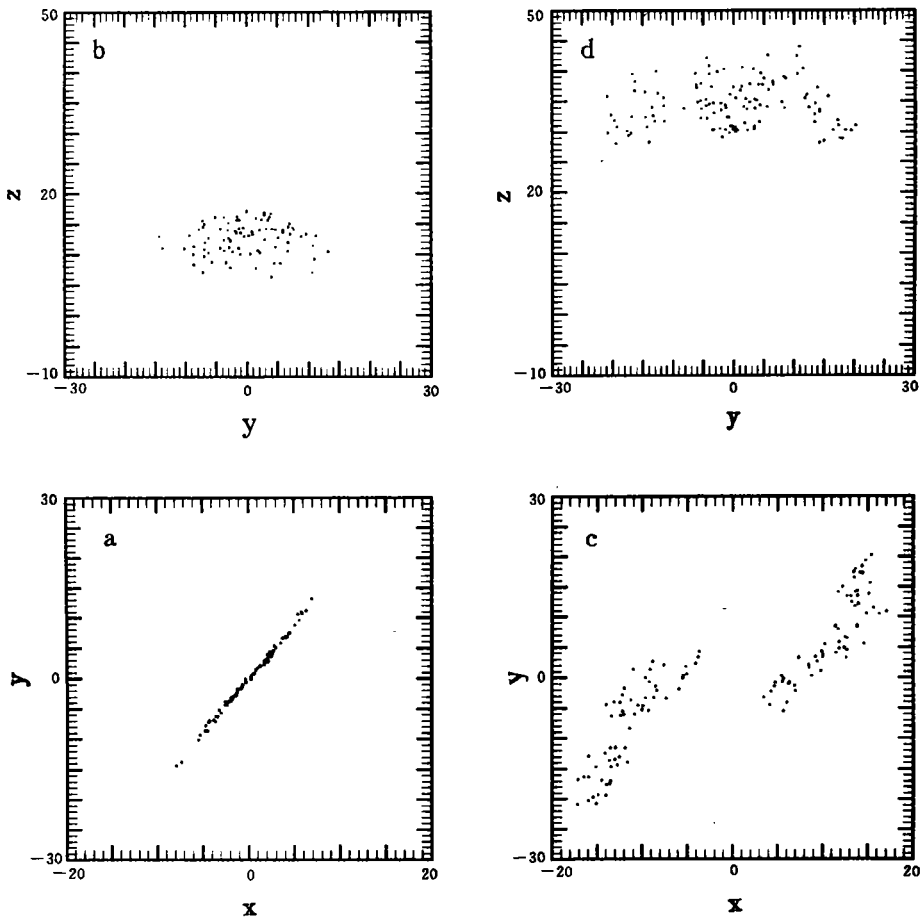


图5 相应于图4的轨线演变,最不不稳定轨线部分(a,b)和相对稳定部分轨线(c,d)在 $x-y$ 平面和 $y-z$ 平面上分布

比较图 3a 和图 3c, 3d 可以看出,有限时间不稳定指数的大值对应着 z 分量的极小值以及 x 分量的剧烈变化。因此最不稳定的区域在相空间中应该是相对固定的。为了清楚地表示不稳定特征的局域性,我们给出了相空间中不稳定指数的分布。图 4 给出了积分了 40 个单位时间的轨线演变在 $x-y$ 和 $y-z$ 平面上的投影,图 5a, 5b 是 $\lambda_1 > 4.0$ 的点的分布(按 $\Delta t = 0.05$ 取一个点,计算一次有限时间不稳定指数)。从图 4 上可以看到,无论 $x-y$ 投影面上还是 $y-z$ 投影面上,不稳定区十分集中。这些区域同 Palmer^[15] 实际演变计算得到的误差迅速增长区相一致。而且大的不稳定同轨线演变的特征密切相关。从图 4 可以看到,最大不稳定都伴随着轨线围绕的平衡态的转换。不过需要指出,轨线转换围绕平衡态时,不稳定指数并不总是一样大的,只有当同轨线演变的 z 分量最小相重合时,才能出现最大的不稳定,也只有在此时才是最不可预报的。相反,即使轨线改变其所围绕的平衡

态,此时 z 值相对较大,那么轨线仍是相对稳定的,误差增长并不快。上述分析充分证实了最大不稳定具有很强的局域性,对应着轨线的特殊演变阶段,对混沌系统不稳定局域特征的分析,可以揭示出导致不可预报的本质。

为了分析相对稳定区域的局域特征,给出了 $\lambda < 1.2$ 的轨线部分在相空间中的分布(图 5c, 5d)。可以看到,它们分布在相空间中很有限的区域内。尤其有意义的是,相对稳定的区域和不稳定区域截然可分。这更进一步表明混沌系统具有强烈的局域性,同时也说明了用 Lyapunov 指数等描述全局特征的量来讨论实际可预报性是不尽合理的。

4.2 局域时间不稳定局域特征

局域时间不稳定是讨论误差增长率。通过对其计算将进一步证实混沌系统的局域特征,并讨论同有限时间不稳定的关系。

图 6a 给出了最大误差增长率的时间演变。为了同有限时间不稳定相比较,我们将瞬时增长率转换成在 $\Delta t = 0.1$ 时间内的误差增长倍数(图 6b)。可以看到无论是演变方式还是数值大小同有限时间不稳定都非常一致。图 7 则是误差增长倍数大于 4.0 和小于 1.2 相应的轨线在相空间中的分布,可以看到同有限时间不稳定十分一致。因此,对局域时间不稳定的分析进一步证实了有限时间不稳定讨论中得到的结论。

5 结论与讨论

在业务预报中发现,个例与个例之间预报技巧有很大的不同^[9,10],这一事实引起广泛的兴趣。对这一问题的研究,无疑对于导致不可预报原因的认识,如何改进数值天气预报系统以及如何进行延伸期的预报都具有重要意义。过去建立在混沌理论上的可预报性研究,主要是描述全局特征,显然不能解释这种预报技巧的变化。为此本文提出了应该分析混沌系统的不稳定局域特征,包括时间上和相空间中的局域特征。为刻画混沌系统的不稳定局域特征,引进了有限时间不稳定和局域时间不稳定概念。它们分别表示具有小扰动误差的轨线在有限时间内的分离程度和瞬时扰动误差增长率。而对于这种不稳定的分析,最后分别成为正定对称阵和一般对称阵的广义特征值的计算。

通过对 Lorenz 系统的分析表明,在相空间中混沌和平衡态吸引子可以共存,此时是否可预报则完全依赖于初值。而在混沌吸引子上,无论是有限时间不稳定还是局域时间不稳定都具有很强的局域特征。尤其在相空间中,不稳定区域和较稳定的区域截然相分离。因此,混沌系统中导致不可预报,是由于轨线演变过程中进入到那些强不稳定区域而误差被迅速放大的结果。而对某一次预报来说,如果轨线在足够长时间内没有进入到那些不稳

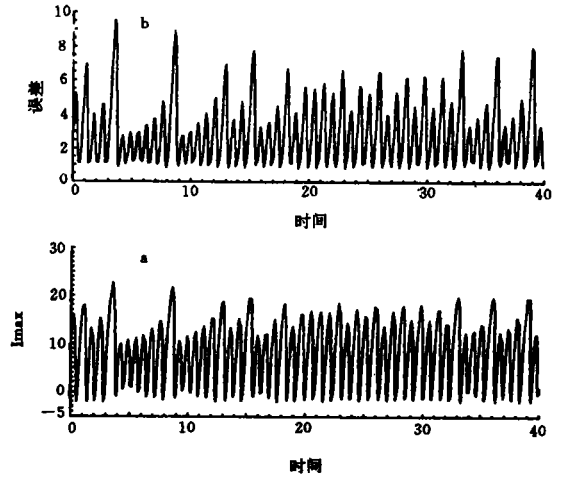


图 6 对应于图 3,局域时间不稳定指数演变(a)和相当于 $\Delta t = 0.1$ 的误差增长倍数(b)

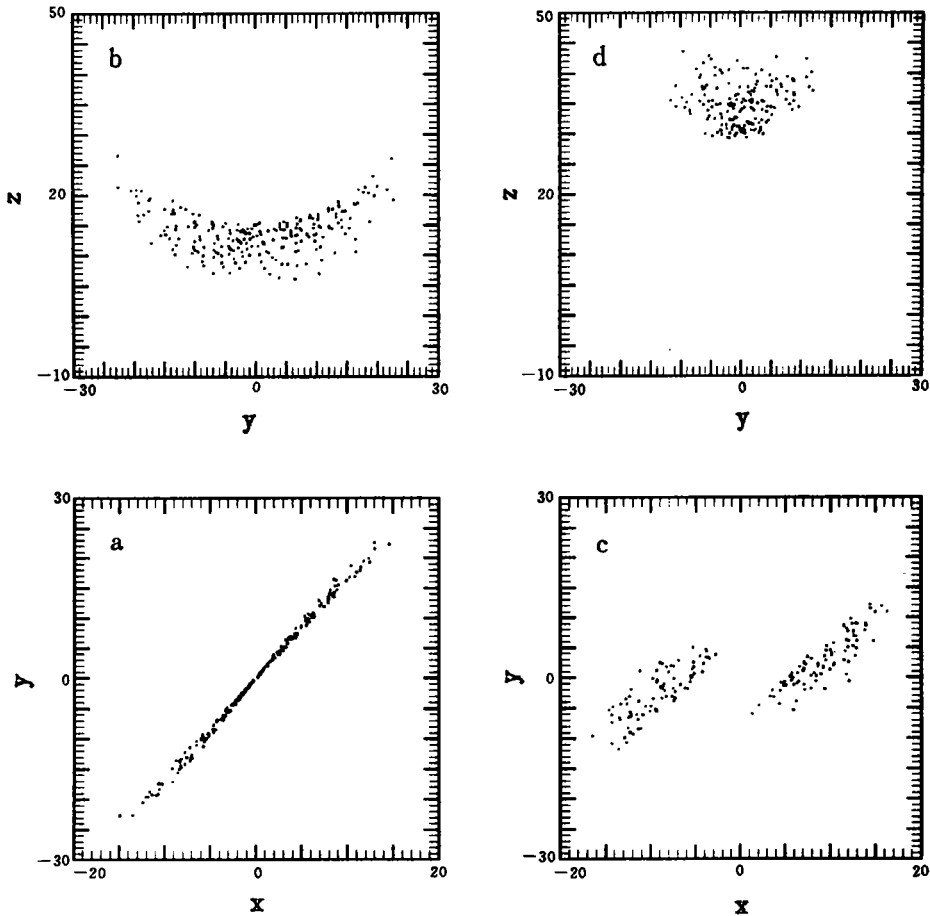


图 7 对应于图 4 和图 5, 但为关于局域时间不稳定
 (a, b 为不稳定轨线部分分布, c, d 为相对稳定轨线部分分布)

定区域,那么此时就有相对长的可预报时间,反之只有相对短的可预报时间。我们认为业务预报中个例与个例之间预报技巧有很大的不同,正是混沌系统这种局域特征的反映。我们的结论意味着即便是完善的模式,由于初始误差的存在,不同的个例的预报技巧可高可低,这完全是由大气的混沌运动性质所决定的。需要指出,实际预报技巧的分析确实证实了相空间中的局域特征,结果将另文发表。

参考文献

[1] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. J Atmos Sci. 1963. 23: 130-141
 [2] Lorenz E N. Irregularity: A fundamental property of the atmosphere. Tellus. 1984. 36 (2): 98-220.
 [3] Charney T G et al. The feasibility of a global observation and analysis experiment. Bull Amer Meteor Soc. 1966. 47: 200-220.
 [4] Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations I. The basic experiment. Mon Wea

- Rev. 1963, 91:99—164.
- [5] Leith C E . Numerical simulation of the earth' s atmosphere. In method in computational physics, 1965, 4. New York. Academic press, 1—28.
- [6] Lorenz E N. Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues. *J Atmos Sci*, 1969, 26: 636—646.
- [7] Wolf A et al. Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica*, 1985, 16: 285—317.
- [8] Fraedrich K. Estimating the weather and climate predictability on attractor . *J Atmos Sci*, 1987, 44: 722—728.
- [9] Branstator G. The variability in skill of 72-hour global-scale NMC forecasts. *Mon Wea Rew*, 1986, 114: 1384—1392.
- [10] Hollingworth A et al. Mid-latitude atmospheric prediction on time scale of 30 days. In variability in the atmosphere and oceans. Ed H Cattle. Royal Meteorological Society, 1987, 117—151.
- [11] Lacarra J F et al. Short-range evolution of small perturbations in a barotropic model. *Tellus*, 1988, 40: 81—95.
- [12] Mukougawa H et al. A relationship between local error growth and quasi-stationary states in the Lorenz system. *J Atmos Sci*, 1991, 1231—1237.
- [13] Molteni F et al. Predictability and finite time instability of the Northern winter circulation. *Quart J Meteor Roy Soc*, 1993, 119, 269—298.
- [14] 李志锦, 纪立人. 轨线不稳定与误差增长. *气象学报*, 1995, 53: 138—147.
- [15] 丑纪范. 大气动力学新进展. 兰州: 兰州大学出版社, 1990.
- [16] Palmer T N. Extended-range atmospheric prediction and the Lorenz model. *Bull Amer Meteor Soc*, 1993, 74 (1) : 49—65.

THE LOCAL FEATURES AND PREDICTABILITY OF THE CHAOTIC SYSTEM

Li Zhijing Ji Liren

(*Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing, 100080*)

Abstract

The local features in phase space and predictability are studied in this paper. It is illustrated that the local features in phase space have to be considered in determining predictability. The notions of local instability including the finite-time and local-time instability which determine the growth rate of the error are introduced and calculation methods are discussed in detail. The results from the calculation of the 3-component Lorenz model show that the local instability, correspondingly the growth rate of error, vary dramatically as trajectories evolve on the chaotic attractor. The region where the growth rate of error is small, is localized considerably and is separable from the region, where the growth rate of error is large. The local predictability depends on the region through which trajectories evolve. It is suggested that the local features are the main reasons why there is a great deal of case to case variability of the predictive skill in operational forecasts.

Key words: Chaotic system. Local features. Predictability.