

山地边界层中场变量的动力学研究*

徐银梓

(南京大学大气科学系, 南京, 210008)

摘 要

采用与实测较接近的二次函数来表达 Ekman 层中的湍流粘性系数 K , 在圆形气压场条件下, 求得了山地上空边界层中的风速, 进而求得散度、涡度和垂直速度等场变量随高度的分布。并作图分析了这些场变量的一些动力学特征。

改进了以往在求解析解时, 略去运动方程中湍流粘性力项中的关于高度的一阶导数项, 以及取山坡面上风速为零作下边界条件等欠合理欠精确的做法。所求得的风速、散度、涡度和垂直速度均用简单的初等函数表示出来, 有助于边界层参数化和深化对边界层动力学的认识。

关键词: 行星边界层, 场变量, 动力学研究。

1 引 言

大气边界层的研究近年来愈来愈受到重视。这不仅是由于边界层中的一切物理现象和过程依赖于自由大气所提供的背景场, 而且也因为大尺度天气过程依赖于边界层中热量、动量和水汽等的输送。自由大气和边界层之间的相互作用愈来愈显得重要, 而边界层顶的垂直速度是相互作用的重要枢纽。描述边界层顶的垂直速度与地转涡度成正比的经典的 Charney-Eliassen(1949)公式^[1]在边界层参数化中曾发挥过重要作用。进而 Wu and Blumen(1982)^[2]又将地转动量近似引入边界层, 对边界层理论作出了重要贡献。但由于这些工作是在取湍流粘性系数 K 为常数的假定下进行的, 而且包含的物理因子较少, 因而改进边界层参数化的工作刻不容缓。徐银梓和赵鸣(1988)^[3]、徐银梓(1988)^[4]利用地转动量近似和小参数展开法且取分段 K 模式改进了上述工作。然而由于 K 在各分层中取为常数, 未能考虑 K 的一阶导数, 这在物理上是欠合理的, 且得到的解析解较繁杂。

关于 K 的经验公式较多, Agee(1973)^[5]等人用指数形式的公式, Estoque(1973)^[6]用线性函数的公式, O'Brien(1970)^[7]用三次函数的形式。这些公式都是根据实测资料整理而得出的, 比较客观且较准确, 并被应用于近代边界层数值计算中。但若将其直接用到边界层动力学中求出解析解来, 却是非常困难的, 且将出现繁杂的特殊函数。本文在 Ekman 层中采用高度 z 的二次函数来近似地代替这些公式, 仍不失为与实测较接近的一种公式。重要的是, 对于一类圆形气压场采用二次函数 K , 运动方程中摩擦力所包含的两项, 即

* 1993年2月16日收到原稿, 1993年7月1日收到修改稿。得到国家自然科学基金资助。

$K \frac{\partial^2 \vec{V}}{\partial z^2}$ 和 $\frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \vec{V}}{\partial z}$ (\vec{V} 为风速)同时考虑后,可轻易地得到解析解。这在物理上更为合理,在数学上甚至比取 K 为粗糙的分层常数所得到的解更为简单。有了用简单的初等函数表达的风速解,进一步研究散度、涡度和垂直速度就简便了。

关于地形边界层的动力学研究,目前在国内外尚不多。Wu(1985)^[8]利用地转动量近似求得了山地边界层的风速和边界层顶的垂直速度,改进了 Pedlosky(1979)^[9]的有关地形边界层的结论。两者均取 K 为常数,但前者改进了取下边界条件为零的做法,本文仿此处理。

本文首先在地形边界层的两个分层即近地层和 Ekman 层中求得风速,再求散度、涡度和垂直速度随高度的分布。最后以一类圆形气压场中心位于东西向山的山脊上为例,用本模式计算山南坡一点 ($x = 10^6 m, y = -10^6 m$) 处的风速、散度、涡度和垂直速度,并作图说明这些场变量的动力学特征。

2 基本方程

设标准直角坐标系为 (x, y, Z) , 此处大写的 Z 表示以海平面为垂直坐标的起点。大地的形状由函数

$$Z = h_g(x, y) \quad (1)$$

来描述,一般取其高度尺度为 $10^3 m$, 水平尺度为 $10^6 m$, 为求解方便起见,作坐标变换

$$z = Z - h_g(x, y) \quad (2)$$

新坐标系为 (x, y, z) , 此处小写的 z 表示以山坡面为垂直坐标起点。

本文研究一类简单的圆形气压场

$$\varphi = \frac{a_1}{2}(x^2 + y^2) \quad (3)$$

式中 φ 为偏差位势高度, a_1 为常数, $a_1 > 0$ 表示气旋, $a_1 < 0$ 表示反气旋。由上式可得到

$$u_g = -a_1 y / f, \quad v_g = a_1 x / f$$

$$\frac{\partial v_g}{\partial x} = -\frac{\partial u_g}{\partial y} = a_1 / f \quad (4)$$

式中 (u_g, v_g) 为地转风, f 为常值柯氏参数。

将山地上空的大气边界层分为近地层和 Ekman 层两层。在近地层中, 风速满足著名的对数律, 下边界条件可仿照文献[8]取为: 在山坡面上风速 \bar{W}_h (复速度) 等于无地形时同高度处边界层中风速 \bar{W}_0 (复速度) 的 γ 倍(本文取 $\gamma = 0.1$), γ 为经验因子。于是近地层中的风速 W_1 为

$$\bar{W}_1 = \bar{W}_h + \frac{\tilde{\Gamma}}{K_1} \ln \frac{z}{z_0} \quad (5)$$

式中 K_1 为 $z = 1m$ 处的 K 值, $\tilde{\Gamma}$ 为待定复常数, z_0 为粗糙度。在 Ekman 层中考虑部分非线性惯性力的平流作用, 利用式(4)可得到地转动量近似下的运动方程为

$$K \frac{\partial^2 \bar{W}_2}{\partial z^2} + \frac{\partial K}{\partial z} \frac{\partial \bar{W}_2}{\partial z} - if' \bar{W}_2 = -if \bar{W}_g \quad (f' = f + a_1/f) \quad (6)$$

式中 \bar{W}_2 为 Ekman 层中的复速度, \bar{W}_g 为地转复速度。本文取 K 为二次函数, 即

$$K = (\alpha z + \beta)^2 \quad (7)$$

为简单起见, 取近地层顶的局地高度 h_1 为 100m, 取整个边界层顶的局地高度 h_T 为 1000m, 这与实测基本吻合。 α, β 为常数, 取值为

$$\alpha = \frac{K_m^{1/2}(m^{1/2} - 1)}{h_T - h_1}, \quad \beta = \frac{K_m^{1/2}(h_T - h_1 m^{1/2})}{h_T - h_1} \quad (8)$$

式中 K_m 为 K 的最大值, 通常出现在 h_1 附近, 于是 $K_m = K_1 h_1$, 这是因为在近地层中 K 为 z 的线性函数的缘故。边界层顶处 K 值很小, 此处已取为 K_m 的 m 倍 ($0 < m < 1$, 本文取 $m = 0.1$)。将式(7)代入式(6)中, 再作变换

$$S = \ln(\alpha z + \beta) \quad (9)$$

变系数的方程便化为常系数方程, 通解为

$$\bar{W}_2 = \bar{W}_T + \tilde{a} e^{rS} + \tilde{a}' e^{r'S} \quad (10)$$

$$\left(r = -\frac{1}{2} + \mu, \quad r' = -\frac{1}{2} - \mu, \quad \mu = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{4f'i}{\alpha^2}\right)^{1/2}\right)$$

式中 \tilde{a}, \tilde{a}' 为待定复常数。上边界条件可取为无粘风, 即在式(6)中令 K 为零而解出的风 \bar{W}_T 。

$$\bar{W}_T = \frac{f}{f'} \bar{W}_g \quad (z = h_T) \quad (11)$$

再利用衔接条件, 即在分界面 $z = h_1$ 处, 风速和粘性应力均连续, 并可求出复常数

$\tilde{\Gamma}, \tilde{a}, \tilde{a}'$, 最后可得到分层中的风速为

$$\bar{W}_1(z) = \bar{W}_h + \frac{\bar{W}^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} \quad (12)$$

$$\bar{W}_2(z) = \bar{W}_T + \bar{W}_T' (aK^{r/2} + a'K^{r'/2})$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{W}^* &= \frac{\kappa}{K_1} \bar{W}_T' \Gamma & \bar{W}_T' &= \bar{W}_T - \bar{W}_h \\ a &= [aH(r - r'm^\mu)K_m^{1/2} + m^\mu - 1]^{-1} K_m^{-r/2} \\ a' &= - (mK_m)^\mu a & \Gamma &= \alpha(r - r'm^\mu)K_m^{(r+1)/2} a \end{aligned} \quad (13)$$

$$H = \frac{1}{K_1} \ln \frac{h_1}{z_0} \quad K = (\alpha z + \beta)^2$$

式中 κ 为 Karman 常数, 取为 0.4, W^* 为摩擦复速度。由式(12)可知, 在近地层中风速与山坡风之差服从对数律。在 Ekman 层中风速是 K 的显函数, 说明风速对湍流粘性系数是非常敏感的。因 K 是高度的二次函数, 故又可以说 Ekman 层中的风速与无粘风之差是高度的综合复幂函数。

3 散度、涡度和垂直速度

利用已求得的风速表达式很容易求得两个分层中的散度

$$D_1 = D_h + \frac{D^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} - \frac{1}{z\kappa} \bar{W}^* \cdot \nabla h_g \quad (14)$$

$$D_2 = (u_T' \nabla \cdot M + V_T' \nabla \cdot (iM)) - M_r D_h - M_r \zeta_T - (\bar{W}_T M') \cdot \nabla h_g$$

和涡度

$$\zeta_1 = \zeta_h + \frac{\zeta^*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + \frac{1}{z\kappa} (i\bar{W}^*) \cdot \nabla h_g \quad (15)$$

$$\zeta_2 = \zeta_T - (u'_T \nabla \cdot (iM) + v'_T \nabla \cdot M) - M_i D_h + M_r \zeta_T + (i\bar{W}'_T M') \cdot \nabla h_g$$

式中

$$\begin{aligned} u'_T &= u_T - u_h, & v'_T &= v_T - v_h, & D_h &= \nabla \cdot \bar{W}_h, \\ D^* &= \nabla \cdot \bar{W}^*, & \zeta_T &= \nabla \wedge \bar{W}_T, & \zeta_h &= \nabla \wedge \bar{W}_h, \\ \zeta^* &= \nabla \wedge \bar{W}^*, & \zeta_T &= \zeta_T - \zeta_h, \\ M &= aK^{\frac{r}{2}} + a'K^{\frac{r'}{2}} = M_r + iM_i, \\ M' &= \frac{\partial M}{\partial z} = \alpha(arK^{\frac{r-1}{2}} + a'r'K^{\frac{r'-1}{2}}) \end{aligned} \quad (16)$$

D^* , ζ^* 为摩擦复速度的散度、涡度, D_h, ζ_h 为山坡风的散度、涡度, ζ_T 为无粘风散度。式中 $\nabla \cdot$ 和 $\nabla \wedge$ 均为 z 坐标中的微分算子。 M_r, M_i 中的下标分别表示取 M 的实部和虚部。

由式(14)知,近地层的散度由三项组成:(1)山坡风散度项;(2)摩擦速度散度项,此项随高度增大而增大,服从对数律,且与粗糙度有关;(3)摩擦速度爬坡,此项是由摩擦与地形相互作用造成的,在数值上随高度增大而减小,说明在近地层中,地形对散度的影响集中在山坡附近。Ekman 层中的散度包含四项,前三项与无粘风、山坡风及其散度、涡度有关,最后一项是风速垂直切变爬坡项,因为

$$-(\bar{W}'_T M') \cdot \nabla h_g = -\frac{\partial \bar{W}'_2}{\partial z} \cdot \nabla h_g \quad (17)$$

对于涡度可由式(15)作出类似的分析(从略)。

将连续方程关于垂直速度从山坡面到任一高度积分,并利用已求得的散度表达式,可得到垂直速度随高度的分布为

$$\begin{aligned} w_1 &= -D_h(z - z_0) - \frac{D^*}{\kappa} (z \ln \frac{z}{z_0} - z + z_0) + \bar{W}_1 \cdot \nabla h_g \\ w_2 &= D_h(B_r - h_1 + z_0) - \frac{D^*}{\kappa} (h_1 \ln \frac{h_1}{z_0} - h_1 + z_0) - (u'_T \nabla \cdot B \\ &\quad + v'_T \nabla \cdot (iB)) + \zeta_T B_i + \bar{W}_2 \cdot \nabla h_g \end{aligned} \quad (18)$$

$$(B = B_r + iB_i = \frac{1}{\alpha} [\frac{a}{r+1} (K^{\frac{r+1}{2}} - K_m^{\frac{r+1}{2}}) + \frac{a'}{r'+1} (K^{\frac{r'+1}{2}} - K_m^{\frac{r'+1}{2}})])$$

若令 $z = z_T$, 则由上式可得到对边界层参数化很重要的边界层顶垂直速度 W_T 如下:

$$\begin{aligned} w_T &= \sum_{j=1}^5 w_{Tj} \\ w_{T1} &= D_h(B_r(h_T) - h_1 + z_0) \\ w_{T2} &= -\frac{D^*}{\kappa} (h_1 \ln \frac{h_1}{z_0} - h_1 + z_0) \\ w_{T3} &= -u'_T \nabla \cdot B(h_T) - v'_T \nabla \cdot (iB(h_T)) \\ w_{T4} &= \zeta_T B_i(h_T) \\ w_{T5} &= \bar{W}_T \cdot \nabla h_g \end{aligned} \quad (19)$$

边界层顶垂直速度包括五项：(1)山坡风散度项；(2)摩擦速度散度项；(3)无粘风与山坡风之差贡献项，此项既包含山坡风又包含 K ，说明此项包含了地形与摩擦两者的相互作用；(4)涡度项，此项也包含着地形与摩擦的相互作用；(5)无粘风爬坡项，此项与摩擦无关。

若略去近地层，且取无滑的下边界条件，即 $v = 0$ ，再略去地转动量近似，则可将式(19)化为

$$w_T = \bar{W}_g \cdot \nabla h_g + \zeta_g \sqrt{\frac{K}{2f}} \tag{20}$$

这就是 Pedlosky(1979)的结果。此式表明边界层顶垂直速度等于地形强迫抬升作用和 Ekman 气流的摩擦辐合作用两者的简单和，也表明，经典的结果并不包含地形和摩擦两者的相互作用。式(19)是式(20)的推广。

4 个例分析

设大地形为东西向山，其函数表达式为

$$h_g = h_m e^{-y^2/L^2} \tag{21}$$

山脊高度取为 $h_m = 10^3$ m，长度尺度 L 取为 10^6 m，圆形气压场由式(3)给出，其中心位于山脊之上。且取 $a_1 = \pm 0.2 \times 10^{-8} \text{s}^{-2}$ ， $f = 10^{-4} \text{s}^{-1}$ ，选取山的南坡一点 $P(x = 10^6 \text{m}, y = -10^6 \text{m})$ 处进行计算， P 点位于圆形涡旋中心的东南方，此处的地转风 $W_g = \pm (20 \text{ms}^{-1}, 20 \text{ms}^{-1})$ ，山的坡度 $\nabla h_g = (0, 0.0007)$ ，用本模式在 P 点计算所得的 K ，风速、散度、涡度和垂直速度等随高度的分布绘制成 5 幅图。在这些图中，曲线(a)，(a')和曲线(b)，(b')分别为气旋和反气旋中各物理量随高度的分布曲线，其中带有撇号的(a')，(b')表示考虑了地形的情况。

图 1 表明，曲线(b)表示的反气旋中的 K 值大于曲线(a)所示的气旋中的 K 值。这是由于非线性平流作用即惯性离心力的作用，使反气旋中的无粘风比气旋中的大的缘故。

在图 2 中，曲线(b)和(b')在曲线(a)，(a')的外部，说明反气旋中的风速较大。在 $z = 0.1 \text{m}$ 处，曲线(a)，(b)的数值为零，而曲线(a')，(b')的数值为 2ms^{-1} 左右，这是由于取山坡风不为零的缘故。在 700m 以上，曲线(a)和(a')几乎重合，说明地形对风速的影响表现在边界层的中下部。还要指出，在 50m 处，风速已达无粘风，其夹角的一半，且风偏离无粘风，其夹角小于 30° 。

图 3 中的曲线(a)和(a')区别甚大，说明地形对散度的影响不可低估，特别是在近地

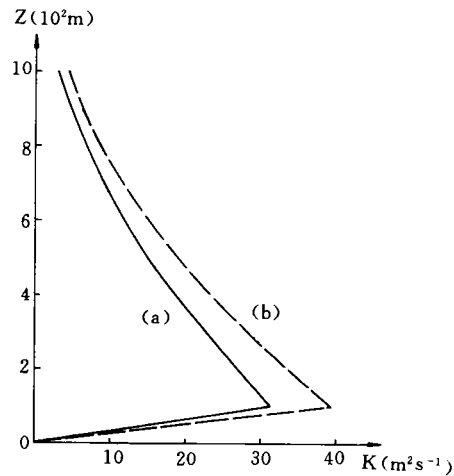


图 1 K 随高度的分布
(曲线：a. 气旋, b. 反气旋)

层中。这可由式(14)的第一式第三项中出现数值很小的 z 在分母中得到解释。到边界层上部,风速垂直切变爬坡作用甚至会造成散度发生变号。

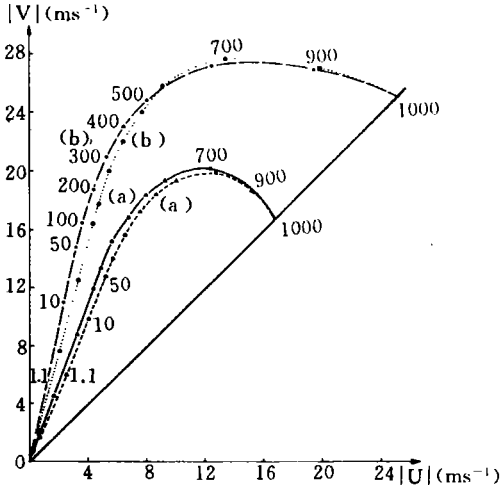


图2 风速随高度的分布

(曲线(a): $\zeta_g > 0, \frac{\partial h_a}{\partial y} = 0$; 曲线(b): $\zeta_g < 0, \frac{\partial h_a}{\partial y} = 0$;

曲线(a'): $\zeta_g > 0, \frac{\partial h_a}{\partial y} = 0.0007$; 曲线(b'): $\zeta_g < 0, \frac{\partial h_a}{\partial y} = 0.0007$)

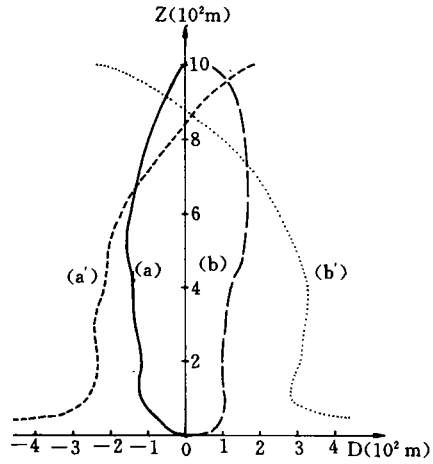


图3 散度随高度的分布

由式(15)中的第一式右端第三项知,近地层中地形与摩擦相互作用使山坡附近的涡度变得很大(分母中的 z 很小),故在图4中,此处的曲线(a)和(a')差别很大。在整个边界层中,地形使涡度均有所增加。并未出现类似散度分布在边界层中上部减少甚至变号的情况。比较图4与图3知,地形对涡度和散度的影响是不同的。

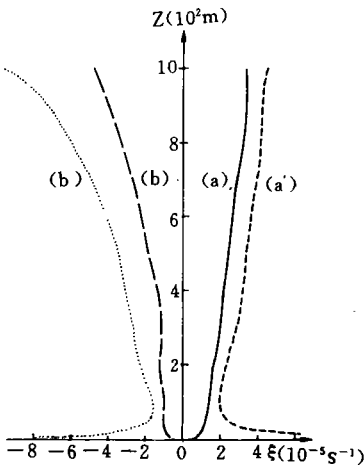


图4 涡度随高度的分布

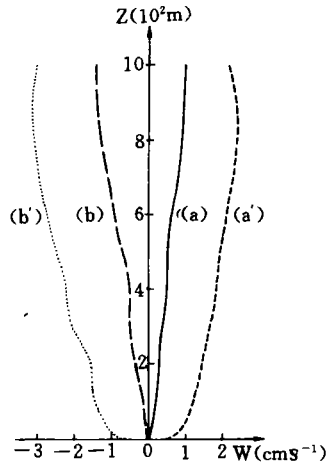


图5 垂直速度随高度的分布

在山坡面上,垂直速度由山坡风强迫抬升决定,由图 5 看出其数值并不大。由图 3 知地形使近地层的散度变得很大,但由于此层很薄,故积分结果数值并不大。尽管如此,在近地层顶,地形对垂直速度的相对影响还是可观的。例如在气旋中从无地形的 0.17cms^{-1} 变为有地形的 1.2cms^{-1} ,增加了 6 倍。由于 900m 附近,散度由负值变为正值,积分结果使垂直速度由最大值 2.29cms^{-1} 开始变小,在边界层顶为 2.19cms^{-1} ,比无地形时边界层顶垂直速度 0.97cms^{-1} 增加了一倍左右。反气旋中也是如此。

5 小结

本模式采用二次函数表达 Ekman 层中的 K,使摩擦力项中的一次导数和二次导数均得到考虑。本模式还计及了惯性力中的非线性平流作用,以及山坡风不为零的下边界条件。利用变量代换求得了用初等函数表达的风速、散度、涡度和垂直速度等场变量随高度分布的表达式。在圆形气压场中心位于东西向山的山脊上的个例中计算了南坡某一点处的场变量,结果表明:(1)风速在 50m 处可达无粘风的一半,风速与无粘风的最大夹角小于 30° 。地形对风速的影响表现在边界层中下部,数值不大。(2)地形使山坡附近的散度数值变得很大,在上部使散度发生变号。(3)地形使气旋(反气旋)中的涡度在数值上有所增加,且在整个边界层中均为正(负)值。(4)气旋(反气旋)中,上升(下沉)气流随高度逐渐增加。有地形时近地层顶的垂直速度比无地形时要大若干倍,边界层顶垂直速度比无地形时大一倍左右。

以上结论对边界层参数化和加深对边界层动力特征的认识是有帮助的。但个例的数值计算结果只是南坡某一点处的情况,若换为另一点,或山的方向改变等等,则上述计算结果应做相应的改变。还有,本模式未考虑斜压性、层结性以及对流惯性力的作用,这些都有待于进一步探讨。

参考文献

- [1] Charney J G and Eliassen A. A numerical method for predicting the perturbations of the middle-latitude westerlies. *Tellus*. 1949, 1: 38—54.
- [2] Wu R and Blumen W. An analysis of Ekman boundary layer dynamics incorporating the geostrophic momentum approximation. *J Atmos Sci*. 1982, 39:1774—1782.
- [3] Xu Y and Zhao M. The motions in the boundary layer under the geostrophic momentum approximation in incorporating a three-section K distribution. *Acta Met Sinica*. 1988, 46(3):267—275.
- [4] Xu Y. The wind in the baroclinic boundary layer with three sublayer incorporating the weak non-linear effect. *Advances in Atmospheric Sciences*. 1988, 5(4):483—497.
- [5] Agee E M. A height-dependent model of eddy viscosity in the planetary boundary layer. *J Appl Met*. 1973, 12: 409—412.
- [6] Estoque M A. Numerical modelling of the PBL in "Workshop on Micrometeorology". *Amer Met Soc*. 1973, 217—270.
- [7] O'Brien J. A note on the vertical structure of the eddy exchange coefficient in the planetary boundary layer. *J Atmos Sci*. 1970, 27:1213—1215.
- [8] Wu R. The influences of orography upon the flow with Ekman boundary layer under the approximation of geostrophic momentum. *Adv in Atmos Sci*. 1985, 2: 1—7.

[9] Pedlosky J. Geophysical fluid dynamics. Springer Verlag, 1979. 208—222.

DYNAMIC STUDY OF FIELD VARIABLES IN THE PLANETARY BOUNDARY LAYER ABOVE OROGRAPHY

Xu Yinzi

(Department of Atmospheric Sciences, Nanjing University, 210008)

Abstract

By use of the eddy exchange coefficient K expressed by the quadratic function in Ekman layer which is close to observation, and under the condition of circle pressure field, the wind velocity in the planetary boundary layer (PBL) is obtained. Further, the distributions with height of field variables of divergence, vorticity and vertical velocity are gained.

In this paper, the first order derivation in the term of eddy discocity force in the motion equation and the lower boundary condition that the wind velocity at the mountain slope is not zero are counted. In the past, both of these are often neglected. The wind velocity, divergence, vorticity and vertical velocity are expressed by the simple elementary functions in this paper which is helpful for the parameterization and the deepening of dynamics cognition for the PBL.

Key words: PBL, Field variable, Dynamic study.