

斜压气流的中尺度稳定性

II. 横波型不稳定*

张 可 苏

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文是“斜压气流的中尺度稳定性”的第二部份,讨论基本流对横波型中尺度扰动的稳定性。

将 f -平面的 Eady 模型推广到非地转情况,得到斜压基流的双模态不稳定谱;在天气尺度和次天气尺度上出现 Eady 模态,在几十至几百公里的惯性尺度上出现非地转斜压中尺度模态。在垂直剖面上中尺度模态呈非对称“猫眼”流型,在水平方向上散度与涡度交替分布。对同一线性风速廓线,中尺度模态的发展率约为 Eady 模态的 4 倍,两种扰动发展的主要能源都是旋转基流中储存的斜压有效位能。

一、引 言

在基本流对横波型扰动的稳定性研究方面,过去的工作主要集中在天气尺度和对流尺度波段上。Charney^[1]和 Eady^[2]最先发现斜压气流对准地转天气尺度扰动的不稳定性。

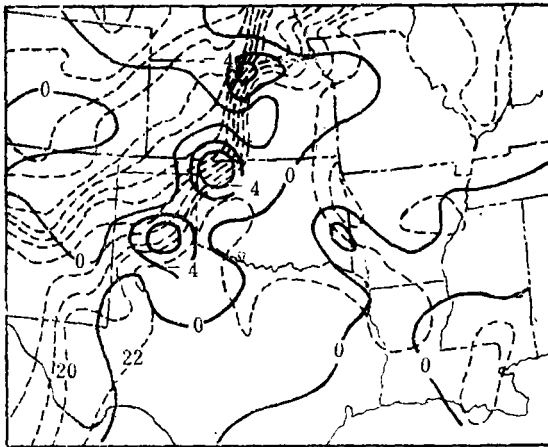


图 1 沿热成风方向排列的地面中尺度辐合区及温度波

(散度场等值线间隔为 $4 \times 10^{-5} \text{s}^{-1}$, 等温线间隔 2°C 。
SESAME 79, 5 月 9 日 14 GMT, Texas, Amaxi110⁽⁷²⁾)

在准地转框架内,即使考虑凝结潜热以减小有效静力稳定度,从而使 Eady 模态向短波方向延伸,也只能得到 2000 km 左右的扰动,当风速切变集中在一个薄层或基流在垂直方向有明显二次切变时也能得到波长较短的 Eady 模态^[3]。这些“湿”的或“浅薄”的准地转扰动也许能说明梅雨锋及极涡外围的中间尺度波,然而更困难的是惯性尺度上的动力学(几十到几百公里)。通过近似分析,Stone^[4,5]指出,里查孙数 $Ri > 0.95$ 时有斜压不稳定, $Ri < 0.95$ 时有对称不稳定, $0 < Ri <$

$\frac{1}{4}$ 时有 Kelvin-Helmholtz 不稳定。

Lilly^[6]根据二维湍流理论分析,认为中尺度运动处于能谱曲线上的惯性域,只有能量传

* 本文于 1985 年 12 月 12 日收到, 1987 年 1 月 20 日收到修改稿。

输而无能量注入,因而中尺度运动是由小尺度运动支持的。不过,平均能谱曲线上缺乏中尺度谱峰并不能证明大气对中尺度扰动绝对稳定,相反,这也许只说明中尺度不稳定要求比较强的条件因而是小概念事件而已。观测上发现百公里尺度的扰动要求组织专门的高精度,多时次野外综合观测试验,图1是美国强环境风暴试验中尺度分析的一个例子(SESAME79)^[7]。沿冷锋有清楚的波长约400 km的温度波和辐合区,涡度场也有相应分布,扰动列的走向沿500 hPa冷涡前的西南急流轴。以下讨论斜压连续层结大气中产生此类横波型中尺度扰动的条件。

二、控制方程及简单解析解

本文的第一部份^[8]已给出三维扰动的控制方程组(1)及适于用矩阵法求解的方程组(2)。为了得到简单情况下的解析解,首先讨论横波型扰动的特征方程,即本文第一部份的方程(5):

$$[f^2 - k^2(U-C)^2] \frac{d^2W}{dZ^2} - \frac{2f^2U_z}{(U-C)} \frac{dW}{dZ} - k^2[N^2 - \lambda k^2(U-C) - U_{zz}(U-C)]W = 0 \quad (1)$$

其中 W 是垂直扰动的特征函数, C 是复特征相速, U 为基本气流, f 是柯氏参数, N 是浮力频率, k 是 x 方向波数, $\lambda=0,1$ 分别表示是否静力平衡。方程(1)在实轴上有三个奇点: $U=C$ 及 $U=C \pm \frac{f}{k}$, 它们分别对应于罗斯贝波和重力惯性波的三个临界层。当 C 的虚部很小时,方程有准奇性,计算特征值 C 时带来收敛性困难。当 $\lambda=0$ 且不考虑 U_{zz} 时,问题比较简单。对大尺度扰动, k 很小, (1)式蜕化为只有一个奇点的经典 Eady 模型:

$$(U-C) \left[\frac{d^2W}{dZ^2} - \frac{k^2 N^2}{f^2} W \right] - 2U_z \frac{dW}{dZ} = 0 \quad (2)$$

这个模型有解析解,其不稳定谱有短波截断。在此短截断以外是否存在中尺度不稳定? 非地转模式(1)可能包含这种机制。下面证明简化的非地转模型(1)也存在解析解。

引入新自变量 $R = \frac{k}{f}(U-C)$ 和 Richardson 数 $Ri = \frac{N^2}{U_z^2}$, 则 U_{zz} 和 $\lambda=0$ 时, (1)变成

$$R(R^2-1) \frac{d^2W}{dR^2} + 2 \frac{dW}{dR} + RRiW = 0 \quad (3)$$

可以证明, (3)式与超几何方程同构。在超几何方程标准型

$$x(x-1)y'' + [(\alpha+\beta+1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0 \quad (4)$$

中引入变量替换 $x = R^2$, 并取 $(\alpha, \beta) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - Ri} \right)$, $\gamma = -\frac{1}{2}$, 即得(3)式。因此(3)式具有超几何函数形式的解 $F(\alpha, \beta, \gamma, R^2)$ 。为了求得方程(3)满足上、下边条件的特解及特征值 C , 可以利用两个线性无关的超几何函数 F_1 和 F_2 构造通解

$$W = AF_1 + BF_2 \quad (5)$$

强迫 W 在积分域上、下边界 $R_T = \frac{k}{f}(U_T - C)$ 和 $R_B = \frac{k}{f}(U_B - C)$ 处满足

$$\begin{cases} W_T = AF_1(R_T^2) + BF_2(R_T^2) = 0 \\ W_B = AF_1(R_B^2) + BF_2(R_B^2) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

对于不全为零的系数 A 和 B , 特征值 C 将由以下系数行列式决定

$$F_1(R_2^2)F_2(R_1^2) - F_2(R_1^2)F_1(R_2^2) = 0 \quad (7)$$

这是一个关于 C 的超越方程, 原则上可用迭代法算出特征值 C 。

三、无旋切变流的稳定性及“猫眼”流型

方程(1)的一个特例是 $f=0$ 。对线性风 $U=aZ$, (1)蜕化为

$$\frac{d^2W}{dZ^2} + \left[\frac{\text{Ri}}{(Z-Z_c)^2} - \lambda k^2 \right] W = 0 \quad (8)$$

其中 $\text{Ri} = N^2/a^2$, $Z_c = c/a$, 作变量变换 $\eta = k(Z - Z_c)$, $\lambda = 0$ 时有

$$W = \eta^{\frac{1}{2}} \begin{cases} c_1 \cos(b \ln \eta) + c_2 \sin(b \ln \eta) \\ c_1 \eta^b + c_2 \eta^{-b} \\ c_1 + c_2 \ln \eta \end{cases} \quad \text{当 } b^2 = \begin{cases} \text{Ri} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - \text{Ri} \\ 0 \end{cases}$$

这里 b^2 定义为正整数。由上、下边条件 $W=0$ 可以定出特征值 c 。设上边界处风速为 U_T , 当 $\text{Ri} < \frac{1}{4}$ 时, 得到复相速度 $c = \frac{U_T}{2} \left(1 \pm i \text{ctg} \frac{n\pi}{2b} \right)$, 因而基流不稳定 (n 为正整数); 当 $\text{Ri} = \frac{1}{4}$ 时, 由边条件定出 $c = \frac{U_T}{2}$, 扰动为中性; $\text{Ri} > \frac{1}{4}$ 时 $c = U_T / (1 - e^{2n\pi/b})$, 仍为中性。因此 $\text{Ri} = \frac{1}{4}$ 是静力平衡线性基流中的稳定性阈值。

对非线性风分布, 方程(1)蜕化为讨论重力波发展与传播的 Taylor—Goldstein 方程

$$\frac{d^2W}{dZ^2} + \left[\frac{N^2}{(U-C)^2} - \frac{U_{zz}}{U-C} - \lambda k^2 \right] W = 0 \quad (9)$$

设基本风场 $U = U_0 \tan h \frac{Z - Z_0}{h}$, 选取层结参数使得 Z_0 处的局地 Richardson 数 $\text{Ri} = 0 - 0.2$, 在 $0 - 10 \text{ km}$ 的积分域内取垂直分辨率 $d = 20 \text{ m}$, 为了得到一个完整的图象, 将基流切变最大中心 Z_0 放在积分域中心, 取切变层特征厚度 $h = 2 \text{ km}$, 然后用“打靶法”求满足方程(9)和边界条件 $W=0$ 的特征值 c 和特征函数 W , (图 2, 3) 由于流函数满足 $w = \psi_x$, 因此图 3 也表示同样满足方程(9)的流函数图象(有 $\pi/2$ 相移)。

由图 2 给出的不稳定谱可知, 在包括二次切变的双曲正切型基本流中, 整个波段 $2\pi h < L < \infty$ 都是不稳定的, 对 $\text{Ri} = 0 - 0.1$, 最大增长率在无因次波数 $kh = 0.5$ (波长 $4\pi h$) 附近, 相速 $c_2 = 0$, 流层中建立以最大切变处 Z_0 为中心的“猫眼”流型(图 3)。当切变层特征厚度 h 增大时, 最不稳定波长 $4\pi h$ 可达几十公里, 比简单对流大得多。为了比较, 也计算了 $\text{Ri} < 0$ 的情况, 这时静力不稳定层结切变的特征流型是略为倾斜的单调对流环(图略), 有别于稳定层结流中的“猫眼”流型而更相似于简单对流。

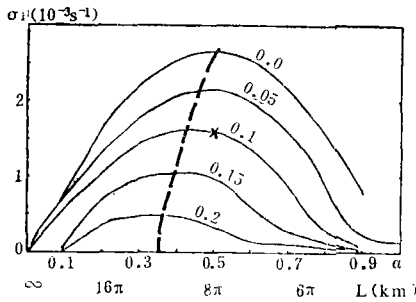


图 2 不稳定谱

(横坐标为波长及无因次波数 $\alpha = kh$, 纵坐标为扰动增长率, Ri 注在曲线旁, 粗虚线标明最不稳定波长)

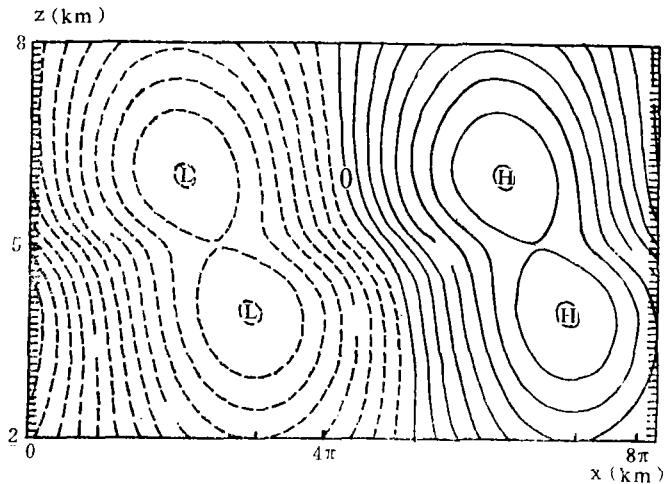


图 3 与图 2 “*” 点对应的特征函数

(横坐标为 x 方向, 纵坐标为高度, $Ri = 0.1$, $L = 8\pi$ km)

四、 $f \neq 0$ ——Eady 模态和中尺度模态

对百公里尺度上的运动, f 通常不可略, 这时由旋转基流所支持的温度梯度可为特定结构的扰动提供有效位能。对称不稳定的讨论指出, 对纯水平扰动惯性稳定和对垂直扰动对流稳定的斜压基流可以是斜压对流不稳定的, 只要扰动的倾度小于基流等熵面的倾度^[8]。对横波型扰动, 在天气尺度波段上, 扰动位相向上西倾的准地转 Eady 模态和 Charney 模态是发展型的^[1,2]; 第二节的讨论指出, 在非地转重要的波段上, 方程(1)还有超几何函数形式的解, 由于用迭代法由超越方程(7)求特征值计算量不小, 下面给出用矩阵法和打靶法求扰动相速、发展率及特征流型的数值方法。

对 (x, z) 坐标内的单纯横波型扰动, 可以引入流函数 ψ 以降低方程的阶次, 令 $u = \psi_z$, $w = -\psi_x$, $M^2 = -g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial z}$, $N^2 = g \frac{\partial \ln \bar{\theta}}{\partial y}$, 算子 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 。基流 U 只是 z 的函数, 则在非弹性近似下, 扰动方程组可写为

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \nabla^2 \psi - U_{zz} \psi_x - f v_z + \theta_x = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) v + f \psi_z = 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \theta - M^2 v - N^2 \psi_x = 0 \end{cases} \quad (10)$$

求以下形式的特征波解

$$(\psi, v, \theta) = \text{Re}[(\Psi, V, T) e^{i k(x - ct)}] \quad (11)$$

将(11)式代入(10)式得到特征函数 (Ψ, V, T) 关于 z 的常微分方程组, 再在 z 方向上离散化后便得到相应的矩阵方程:

$$c P \xi = Q \xi \quad (12)$$

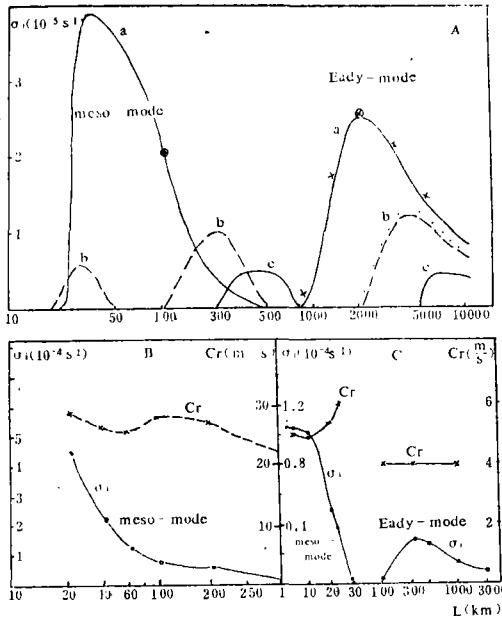


图 4 斜压气流的不稳定谱

(A $Ri=0.625, 6.25, 25$ 分别对应于曲线 a, b, c

右边一组曲线为 Eady 模态, 左边为中尺度模态, $d=0.5\text{km}$, 基流厚度及积分域 $H=10\text{km}$;

B $Ri=0.625, H=10\text{km}, d=0.25\text{km}$

时中尺度模态的增长率及相速度
(纵坐标单位加大了 10 倍);

C $Ri=0.625, H=2\text{km}, d=0.05\text{km}$ 时
中尺度模态及 Eady 模态的增长率和
相速度

(U_x 与 B 相同, 横坐标为波长, 单位: km)

其中 c 是特征值, ξ 为定义在 z 的离散点集上的特征向量, P 和 Q 是由基流参数 M^2, N^2, f , 波数 k 和垂直分辨率 d 组成的复矩阵, 在上、下边界 $W=0$ 的条件下用标准计算软件可直接解出(12)。

图 4A 给出 $U_{zz}=0$ 时用以上矩阵法对三种不同 Richardson 数 $Ri=0.625, 6.25, 25$ 算出的不稳定谱, 基本风在 0—10 km 的积分域内由 0—40 m/s 线性增加, $d=0.5, 0.25\text{km}$ (20 层和 40 层模型), 垂直方向 v, θ 和 ψ 取跳点格式。计算得出两组模态: Eady 模态和中尺度重力惯性波模态。图 4A 右边一组曲线是 Eady 模态的增长率, 当 Ri 减小时不稳定谱“紫移”, 截断波长变短而增长率 $\sigma_i = kc_i$ 增大。为了检验矩阵解法的精确性, 对同样参数求准地转 Eady 模型的解析解^[2], 所得增长率 σ_i 在图 4A 中用黑点表示, 它们接近曲线 b , 说明 20 层的矩阵解法对 Eady 模态足够准确。对 $Ri=0.625$, 曲线 a 的截断波长约 1000 km, 最大增长率约在 1880 km, e-folding 时间约 12 小时。按 Tokioka^[9] 的估计, 梅雨锋上 Ri 的量级为 1, 他将 4 km 厚的切变流分为 30 层, 取 $Ri=0.4$, 得到最不穩定波长为 1256

km, 这种计算显然依赖于 Ri 和切变层厚度 H 。为了检验曲线 a 的计算精度, 又以它为初始估值, 用高精度打靶法 ($d=10\text{m}$) 求方程(1)的两点边值问题, 在同样参数下得到的特征发展率用“ \times ”表示在图 4A 中, 仍非常接近于 20 层矩阵模型结果, 这说明在 meso- α 波段, Eady 模态的垂直分辨率已够。

有意思的是, 与 Kuo^[10] 在 Charney 模态长波截断以外得到不止一组超长波发展型波谱相似, 图 4A 在 Eady 模态的短波截断以外也得到不止一组中尺度非地转不稳定波谱, 特别对小于 1 的 Ri , 得到 20—500 km 整个中尺度 β 波段上的不稳定。和 Eady 模态相反, 中尺度谱段对垂直分辨率非常敏感。在天气尺度上, 方程积分域内只包含一个奇点, 而在中尺度段内, 方程积分域内包括三个奇点, 这相应地要求更高的垂直分辨率。对 $Ri=0.625$ 的计算试验表明, 最简单的二层模式可以得到 Eady 模态, 但完全失去中尺度不稳定波段, 五层模式可得到微弱的中尺度不稳定, 20 层模式给出图 4A 所示的显著的中尺度不稳定谱, 40 层模式中 σ_i 大为增加且最大值向短波方向移动(图 4B), 它在 20 km 波长上并不出现 20 层模式中的计算性短波截断。40 层模式给出的 e-folding 时间为 3—4 h, σ_i 远比天气尺度 Eady 模态大, 相速为 20—30 m/s, 比平均风快。按 Kuo^[11] 的计算, 在

50—100 层间解很小变动,已接近收敛值。为了进一步说明垂直分辨率对中尺度波段的影响而又不增加计算机内存要求,仍用 40 层模型,但将计算域缩小至 2 km,这时 $d=0.05$ km,比图 4 A 高 10 倍,所得结果给在图 4 C 中。我们仍得到不稳定波谱的双模态,左边是中尺度模态,右边是非地转中尺度 α 上的 Eady 模态。由于分辨率提高,在短波方向上不再出现计算性短波截断, σ_i 趋于饱和,这和对称不稳定的谱特征完全相同。此外,由于切变层厚度减小,Eady 模态和中尺度模态均向短波方向移动。在低分辨情况下 ($d=0.5$ km),中尺度最大增长率约为 Eady 模态增长率的 1.5 倍(图 4 A),而在高分辨模式中 ($d=0.05$ km),非地转模态约为 Eady 模态增长率的 3.6 倍,这是中尺度扰动发展所必需的。

以上不同精度的计算至少肯定在中尺度 α 波段上有“浅薄”的或“湿”的 Eady 模态(这时 H 或 Ri 很小),而在几十至几百公里的惯性尺度上有非地转重力惯性波模态,它们的增长率小于不稳定层结中的对流云,但大于准地转的 Eady 模态。

五、特征波结构和能量转换

特征波和斜压基流的结构决定能量转换性质。在无旋切变流中,基本流的动能是扰动发展的唯一能源;在旋转切变流中,由旋转所支持的有效位能成为扰动发展的另一基本能源。过去的研究证明,天气尺度的 Eady 模态靠后者支持,小尺度切变流不稳定靠前者支持。本节研究中尺度特征波结构和扰动发展的能源。能量计算公式已在本文的第一部份给出^[8]。

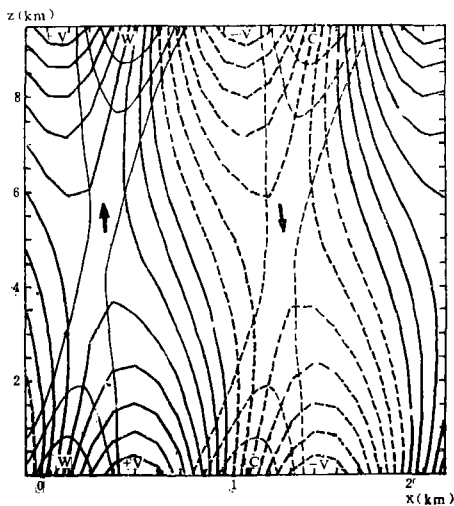


图 5 Eady 模态结构

(粗实线和虚线分别代表南、北风等值线,细实线和虚线代表正、负温度扰动(单位任意),粗箭头标注最大上升、下沉区, $H=10$ km, $Ri=0.625$, $L=2000$ km(图 4 A 中的 \otimes 点))

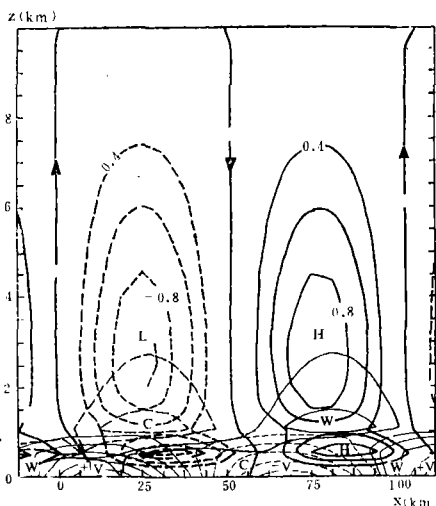


图 6 非地转中尺度特征波结构

(粗线是流线,中粗线为温度扰动等值线,细线是经向风等值线,实线为正,虚线为负;正、负温度中心标以 W, C; $Ri=0.625$, $L=100$ km(图 4 A 中的 \odot 点))

图 5 给出 $Ri=0.625$ 、波长 2000 km 的 Eady 模态的结构(图 4 A \otimes 点),特征波和特征值均由解方程(12)得出。图 5 给出斜压天气尺度扰动的基本特征;垂直速度在中层极

大,槽、脊线(南北风分界线)向上西倾,温度场扰动落后于风场扰动, $v\theta, w\theta$ 正相关而 uw 负相关,将特征波解代入能量方程算得比例 $\gamma \equiv \langle \bar{P}, P' \rangle / \langle \bar{K}, K' \rangle \sim 100$,说明 Eady 模态的扰动主要是斜压性质的。

图 6 给出波长为 100 km 的中尺度非地转模态结构(图 4 A 中的 \odot 点)。图中粗实线和虚线代表 (x, z) 平面内的流函数,它在总体上相似于 $f=0$ 无旋切变流中的“猫眼”流型(图 3),但扰动集中于低层,特别是 v 和 θ 向上迅速衰减。最近 Kuo 和 Seitter^[10]对不稳定层结大气计算的扰动结构也具有 v 和 θ 向上迅速衰减的特点。在图 6 中还可由 $u = \psi_z$ 和 $w = -\psi_x$ 推出辐合辐散区,由 v 推出涡度 $\xi = \frac{\partial v}{\partial x}$ 的分布,由此得到 x 方向的结构序列为:辐合一反气旋—辐散—气旋。在低层“猫眼”中心以上辐合场反号而 v 场不变,得到相反的序列。在百公里尺度上,由于 f 的作用,形成重力惯性波沿基流方向上中尺度涡度和中尺度散度中心的交替分布,可能作为图 1 所示的对流低层横波型中尺度扰动的激发机制,用实际风代替线性风计算,可望得到更相似的结果。

中尺度非地转模态的能量性质与 Eady 模态不大相同。将 100 km 尺度上(12)式的特征解代入能量方程,算得的比例 $\gamma = \langle \bar{P}, P' \rangle / \langle \bar{K}, K' \rangle \sim 5$,二者为同一量级。然而比之无旋系统,能量性质有质的差别。在无旋系统里 $\langle \bar{P}, P' \rangle = 0, \gamma = 0$ 。这说明在斜压旋转基流里比在无旋系统中中尺度扰动容易发展。图 6 低层明显的 $v\theta$ 正相关和 uw 负相关均有利于基本场能量向扰动能量的转换。

六、结 语

为了解释沿基本流发生与传播的中尺度到中间尺度扰动,本文将 Eady 模型推广至非地转解域,在短波截断波长以外得到中尺度不稳定波谱。在浅薄切变层和小 Richardson 数情况下, Eady 模态可向中尺度 α 波段延伸,所得特征波仍具有准地转特征。在几十至几百公里的惯性尺度波段上,发展型扰动具有重力惯性波特征,其发展率约为 Eady 模态的 4 倍。这样大的增长率有可能产生足够强的垂直速度和低层辐合,成为启动和组织深厚对流云团的一种动力学机制。

本文只讨论了斜压基流对中尺度横波型扰动最简单的原型模式,为了说明梅雨锋及低空急流上的传播型中尺度扰动及对对流层急流上传动平流层和中间层的中尺度重力波,有必要对各种实际情况进行大量计算。

参 考 文 献

- [1] Charney, J. G., The dynamics of long waves in a baroclinic, westerly current, *J Meteor.*, **4**, 135—162, 1947.
- [2] Eady, E. T., Long waves and cyclone waves, *Tellus*, **1**, 33—52, 1949.
- [3] Prakki, S., et al., Sub-synoptic scale baroclinic instability, *J. Atmos. Sci.*, **39**, 1052—1061, 1982.
- [4] Stone, P. H., On non-geostrophic baroclinic stability, *J. Atmos. Sci.*, **23**, 390—400, 1966.
- [5] Stone, P. H., On non-geostrophic baroclinic stability, part 11, *J. Atmos. Sci.*, **27**, 721—726, 1970.
- [6] Lilly, D. K., Stratified turbulence and the mesoscale variability of the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **40**, 749—761, 1983.
- [7] Ogura, Y., et al., Possible triggering mechanisms for severe storms in SESAME-AVE IV (9—10

- May 1979), *Bull. Amer. Meteor. Soc.*, **63**, 503—515, 1982.
- [8] Tokioka, T., Supplement to non-geostrophic and non-hydrostatic stability of a baroclinic fluid and medium-scale disturbances on the fronts, *J. Meteor. Soc. Japan*, **49**, 129—132, 1971.
- [9] Kuo, H. L., Baroclinic instabilities of linear and jet profiles in the atmosphere, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 2360—2378, 1979.
- [10] Kuo, H.L., and K. L. Seitter, Instability of sheering geostrophic currents in neutral and partly unstable atmospheres, *J. Atmos. Sci.*, **42**, 331—345, 1985.

ON MESOSCALE INSTABILITY OF A BAROCLINIC FLOW 2. TRANSVERSAL INSTABILITY

Zhang Kesu

(*Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica*)

Abstract

The second part of the present study investigates instability of a baroclinic basic flow against the transversal mesoscale disturbances.

By generalizing the Eady model to an ageostrophic one, the bi-mode and even multi-mode instability spectra may occur for a baroclinic basic flow. The Eady-mode appears at synoptic scales, whereas the ageostrophic, baroclinic mode appears at inertial scales ranging from several tens to hundreds kilometers. The Eady-mode, with a quasi-geostrophic structure, has a larger vertical depth, while the meso-modes are mostly confined to the middle and lower troposphere with an asymmetric "cat eyes" pattern in the vertical cross section and an alternative distribution of divergence and vorticity in the horizontal plane. The growth rate of the mesoscale mode is about four times larger than that of the Eady-mode for the same wind profile of linear distribution. The major energy source, which supports these two modes, is the baroclinic available potential energy stored in a rotating basic flow.

The results of this paper may be useful in analysis of the mesoscale disturbances propagating along a basic flow.