

# 非线性动力学和湍流\*

刘式达

(北京大学地球物理系)

## 提 要

湍流的发生和发展湍流的描述是一个基本问题。浑沌运动的最近研究表明,确定性的系统可以有不规则的浑沌结果,因此浑沌的研究对解释湍流现象是非常重要的。

浑沌和湍流的特点是敏感初条件,并且长时间以后是不可预测的。

非线性耗散系统中运动的形态是非常复杂的。可以有定常吸引子,周期吸引子,拟周期吸引子和奇怪吸引子。

当控制参数变化穿过分岔点,吸引子的拓扑性质就要发生变化。

一般,湍流经过极少数几次分岔即可出现。

## 一、引 言

自1883年Reynold作了圆管实验证实湍流存在以来已经百余年了。湍流(当然包括大气湍流)研究的进展是相对缓慢的。但是自从Lorenz<sup>[1]</sup>1963年发现“确定性的非周期流”即浑沌(chaos)以来,给湍流的研究带来新的希望。1971年Ruelle和Takens<sup>[2]</sup>论证层流只要经过极少数几次分岔(bifurcation)即可到达湍流。有意思的是,1978年Feigenbaum<sup>[3]</sup>发现对耗散系统,进入浑沌的演化过程伴随着一个普适的无理常数 $\delta$ ——Feigenbaum常数。

$$\delta = 4.669, 201, 660, 910, 299, 097, \dots \quad (1)$$

Mandelbrot<sup>[4]</sup>提出像湍流这样的不规则的几何图象,它的维数应是分数。这就引起科学界的极大兴趣。研究状态由无序到有序演化的Prigoging耗散结构理论<sup>[5]</sup>,Haken的协同学(synergetics)<sup>[6]</sup>也都把浑沌纳入其研究的范围。

同时已经有很多实验<sup>[7]</sup>证实浑沌的存在。例如周期外力驱动下的非线性强迫振荡中的浑沌,周期电压驱动下的非线性RLC回路中的浑沌,流体实验Be'nard对流中的浑沌,Taylor涡旋中的浑沌,Belousov-zhabotinskii化学反应中产生物浓度的浑沌,强功率声波通过液体时出现的浑沌,激光器中的浑沌,等离子体非线性波相互作用中的浑沌,心脏跳动中的浑沌等等。大气湍流是气象学中最重要的问题之一,Lorenz文章就是研究湍流的尝试。由于Lorenz的成就,1983年他获得瑞典皇家科学院授予的Crafoord奖<sup>[8]</sup>。

由于湍流和浑沌是受运动方程控制的,它们又都是非线性的现象。所以本文就有关浑沌和非线性动力学中的一些概念和结果作简单介绍,供广大气象科学工作者参考。

\* 本文于1984年11月13日收到,1985年7月25日收到修改稿。

## 二、浑沌是确定性的随机

确定性的系统是指动力系统 (Dynamical system), 它们通常由微分方程、差分方程、甚至一些简单的迭代代数方程来描述, 方程中的系数都是确定的。因此只要给出准确的初条件, 就有唯一确定的解。正像拉普拉斯所说: “只要给出初条件我就可以决定未来的一切<sup>[9]</sup>, 这是一种确定论的观点。

但是确定性的系统还会出现浑沌。为此我们用简单的代数迭代方程 (或称一维映射)<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mu x_n(1-x_n) & n=0, 1, 2, \dots \\ \mu &\in [0, 4], x \in [0, 1] \end{aligned} \quad (2)$$

作为例子。

其中  $\mu$  是控制参数,  $x$  是状态参数。方程 (2) 原是理论生态学的一种模型,  $x_n$  代表  $n$  代生物群体数目,  $x_{n+1}$  代表  $n+1$  代群体数目。若 (2) 中只有线性项, 那么  $x_n$  随着  $n$  加大只能无限增加 (当  $\mu > 1$ ) 或无限减小 (当  $\mu < 1$ ), 这显然不符合实际情况。但考虑到食物有限等因素, 必须加上非线性项不使其无限增长或减小。自然界的许多过程, 如大鱼吃小鱼, 云滴碰并增长, 积云对流发展到降水而又使对流减弱等用像 (2) 这种类型的非线性过程来描述是比较合理的。

给定初条件  $x_0$ , 由 (2) 式即可算出状态的时间演变序列 ( $n$  当作时间)

$$x_0, x_1, x_2, x_3, \dots \quad (3)$$

例如取  $x_0 = 0.7$ , 图 1(a)、(b)、(c)、(d)、(e)、(f) 分别是不同  $\mu$  值时算出的结果。

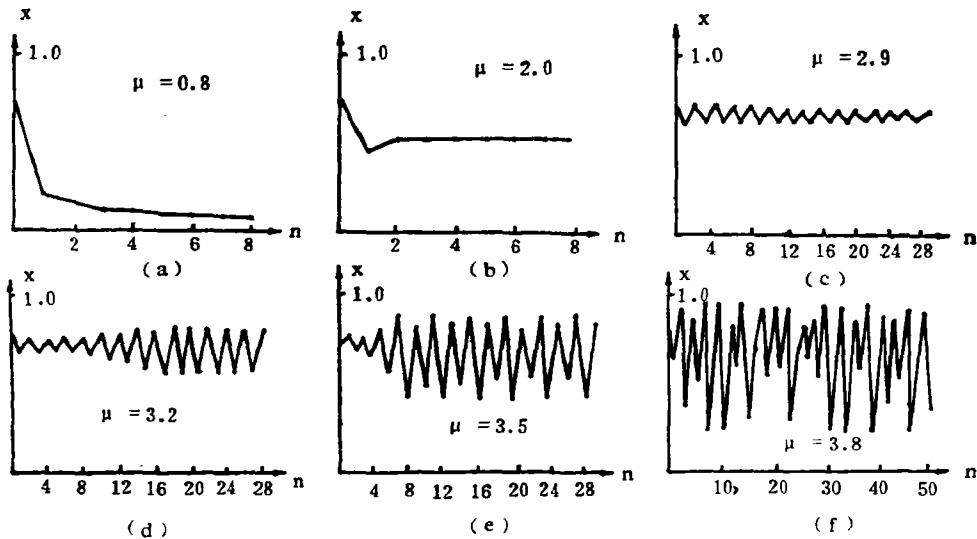


图 1

图 1 (a) 是  $\mu = 0.8$  的情况。随着  $n$  加大,  $x_n$  逐渐趋向于 0,  $x = 0$  是方程

$$x = f(x) \equiv \mu x(1-x) \quad (4)$$

的解, 叫不动点或平衡态。

图 1(b) 是  $\mu=2.0$ , 此时  $x_n$  趋向于 (4) 的另一平衡态  $1-\frac{1}{\mu}=0.5$ 。图 1(c) 是  $\mu=2.9$ ,  $x_n$  仍趋向于  $1-\frac{1}{\mu}=0.66$ , 这两种结果我们叫做周期 1 解。

当

$$A_1 \equiv 3 \leq \mu \leq 1 + \sqrt{6} = 0.3449 \equiv A_2 \quad (5)$$

时, 例如  $\mu=3.2$  见图 1(d)。此时  $x_n$  在两个值上摆动, 我们叫其为周期 2 解。 $\mu$  变化后, 由一个平衡态(周期 1)变成两个平衡态(周期 2)的过程就叫分岔,  $A_1$  叫分岔点。当  $\mu$  增加到

$$A_2 \equiv 3.449 \leq \mu \leq 3.545 \equiv A_3 \quad (6)$$

例如  $\mu=3.5$  时见图 1(e)。此时  $x_n$  在四个值上摆动, 这叫周期 4 解。 $A_2$  是周期 2 到周期 4 的分岔点。

类似,  $A_3$  是周期 4 到周期 8 的分岔点。这种周期倍分岔过程不断下去, 直到极限值

$$\mu_\infty = 3.5669, 945, 672 \quad (7)$$

就变成了周期为  $\infty$  的非周期混沌解了。图 1(f) 就给出  $\mu=3.8$  时出现的混沌结果。

随着  $\mu$  的加大, 分岔点之间距离愈来愈小, 每次缩小的倍数就是 Feigenbaum 常数  $\delta$ , 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n - A_{n-1}}{A_{n+1} - A_n} = \delta \quad (8)$$

以上这种混沌的结果是不能精确地预测的。初始条件的微小差别(这是必然存在的!)例如取  $x_0=0.71$ , 最终将导致和  $x_0=0.7$  时的轨线有很大差异, 甚至两者变得毫无关系, 这叫敏感初条件, 是混沌和湍流的独有特征, 所以混沌也叫奇怪吸引子(strange attractor)。

混沌的发现给“确定论”巨大冲击。1966 年 Heisenberg<sup>[11]</sup> 曾经猜测, 所有非线性现象的一个共同特征是不可预测者(unpredictability), 混沌的结果证实了这种猜想, 所以 Lorenz 提出“长期预报是不可能的”<sup>[12]</sup>。正像普利高津所说: “未来并不完全包含在过去之中”<sup>[9]</sup>。也就是说我们要不断分析事物的变化, 才能把握事物演变的规律。

### 三、新结构的多样性

像方程(2)那样简单的非线性系统, 都有各种定常解、周期解、混沌解等多种形态。可见一般的非线性系统更具有多样化的形态, 这就扩大了我们对事物演化的认识。热力学第二定律告诉我们, 对孤立系统熵要达到极大, 从微观上讲这只能是均匀、无序的简单状态。而实际研究的系统都是开放系统, 其内部有耗散, 和外界有物质和能量交换。由于外界不断有负熵流进入, 这就有可能改变其有序的程度, 出现了许多无序向有序, 结构简单向结构复杂的时空有序结构状态演化。例如 Lorenz 方程<sup>[11]</sup>就是描述当瑞利数增加后, 状态由静止变成有序的对流状态, 最后变成有组织结构的湍流状态。

下面介绍一些常见的运动形态的原型。

方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x \end{cases} \quad (9)$$

其中“ $\dot{\phantom{x}}$ ”代表对时间的导数。

(9) 的解是

$$x = c_1 e^t, \quad y = c_2 e^t \quad (10)$$

它在相平面  $(x, y)$  上是双曲线族(叫轨线), 线上箭头的方向代表时间增加的方向, 如图 2(a)。相平面上的原点  $(0, 0)$ , 它使  $\dot{x}$  和  $\dot{y}$  同时为零, 称为平衡态。图 2(a) 的原点称为鞍点, 其轨线类似于天气图上的鞍形场。

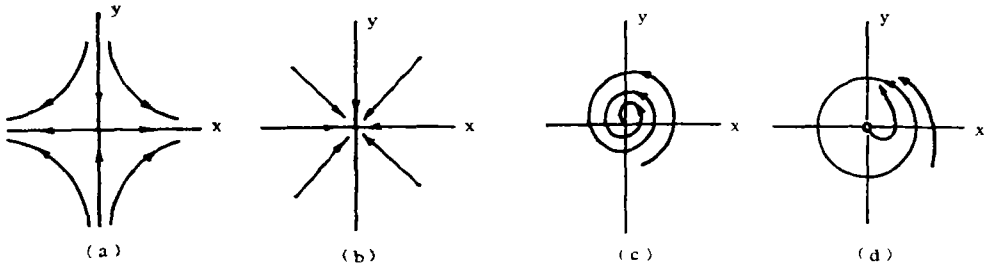


图 2

方程组

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -y \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} \dot{x} = -x - y \\ \dot{y} = x - y \end{cases} \quad (11)$$

的解分别为

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} \\ y = c_2 e^{-t} \end{cases} \quad \text{和} \quad \begin{cases} x = e^{-t}(c_1 \cos t - c_2 \sin t) \\ y = e^{-t}(c_2 \cos t + c_1 \sin t) \end{cases} \quad (12)$$

它们在相平面  $(x, y)$  上的轨线分别是直线和螺旋线, 如图 2(b) 和 2(c), 此处平衡点  $(0, 0)$  分别称为结点和焦点。从线性稳定性分析和图 2 易知, 鞍点是不稳定的, 而图 2(b) 和 2(c) 中的结点和焦点是稳定的。

方程

$$\ddot{x} + (x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x} + x = 0 \quad (13)$$

它具有阻尼项  $\dot{x}$ 。我们考察一下(13)的总能量  $E = \frac{\dot{x}^2}{2} + \frac{x^2}{2}$  的变化

$$\frac{dE}{dt} = \dot{x}(\ddot{x} + x) = -(x^2 + \dot{x}^2 - 1)\dot{x}^2 \quad (14)$$

由(14)看出, 当  $x^2 + \dot{x}^2 < 1$  时,  $\frac{dE}{dt} > 0$ , 即能量增加(相当于阻尼是负的); 当  $x^2 + \dot{x}^2 > 1$  时,  $\frac{dE}{dt} < 0$ , 即能量减小(相当于阻尼是正的)。只有在  $\dot{x}^2 + x^2 = 1$  上有  $\frac{dE}{dt} = 0$ , 这在相平面  $(x, \dot{x})$  上是一条封闭的轨线, 称为极限环(limit cycle), 它代表周期性的运动, 如图 2(d)。

对耗散系统不能只研究状态的暂瞬演变,而要研究长期的状态归宿,这种归宿可以是像图 2 (b)和 2 (c)那样的平衡态,也可以是像图 2 (d)那样的极限环,也可以像在自行车内胎上运动的拟周期形态,也可以像系统(2)中出现的奇怪吸引子的东西。

大气运动的能源是太阳,大气又是粘性流体,所以它是典型的开放耗散系统。我们只有把大气看作是非线性的(而不是线性的)耗散的(而不是保守的)系统,才能准确描述大气运动多样化的形态。Lorenz 正是利用大气的耗散性,找到了静止状态(平衡态)向对流状态(周期态)再向湍流状态转换的机制。1979 年 Charney<sup>[13]</sup> 也正是利用大气的耗散性考虑地形强迫来研究阻塞形势的维持。

#### 四、分岔的定性分析

非线性系统既然有多样化的形态,如何寻找这些形态呢?一般对非线性系统求其解析解是困难的。而分岔的定性分析是有效的方法之一。

大家知道,对线性系统平衡态的稳定性,以  $e^{\lambda t}$  代入系统,由特征值  $\lambda$  来决定。若有一个特征值的实部  $\text{Re } \lambda > 0$ , 则是不稳定的,若所有特征值有  $\text{Re } \lambda < 0$ , 则是稳定的。例如对于(9)、(11)的三个系统,就要决定如下三个矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (15)$$

的特征值。它们分别是  $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -1), (-1, -1)$  和  $(-1+i, -1-i)$ 。故第一个(即鞍点)是不稳定的,后面两个(结点和焦点)是稳定的。

对一般的非线性系统,例如

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y) \\ \dot{y} = G(x, y) \end{cases} \quad (16)$$

平衡态 ( $F=0, G=0$ ) 的稳定性分析,用平衡态附近的相应的线性系统

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (17)$$

来分析。(17)式右端矩阵的元素要用平衡态的值  $x$  和  $y$  代入求值。

新结构的产生是由于老结构失去稳定性而分岔得到的。所谓失稳,就是特征值  $\lambda$  的实部  $\text{Re } \lambda$  由负变到正,即在平面  $(\text{Re } \lambda, \text{Im } \lambda)$  上  $\lambda$  穿过虚轴 ( $\text{Re } \lambda = 0$ ) 造成的。这有三种可能,如图 3 (a)、(b)、(c)。

(1)  $\lambda$  沿实轴  $\text{Re } \lambda$  穿过虚轴  $\text{Im } \lambda$ , 如图 3(a)。

典型例子是

$$\dot{x} = \mu x - x^3 = x(\mu - x^2) \equiv F(x) \quad (18)$$

控制参数  $\mu$  由负变到正,平衡态及其相应的矩阵(17)的特征值  $\lambda$  见 469 页表。

因此,参数  $\mu$  由负变到正时,平衡态  $x=0$  由稳定变成不稳定,且在  $\mu > 0$  时有两个新的平衡态  $x = \pm \sqrt{\mu}$  出现,如图 4。

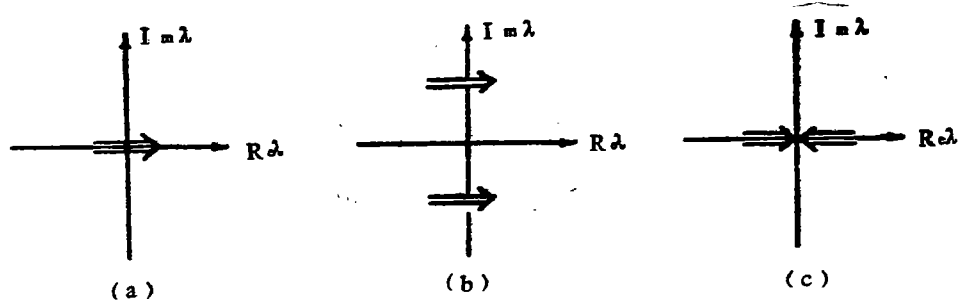


图 3

$\mu < 0$	平衡态 $x=0$	特征值 $\lambda = \mu < 0$ , 稳定
$\mu > 0$	平衡态 $x=0$ $x = \pm \sqrt{\mu}$	$\lambda = \mu > 0$ , 不稳定 $\lambda = -2\mu < 0$ , 稳定

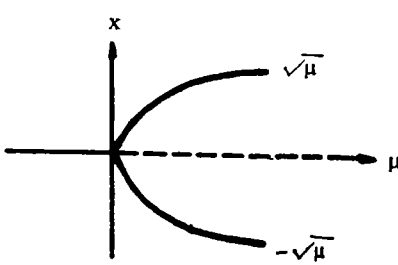


图 4

图中实线和虚线分别表示稳定和不稳定的平衡态。图 4 形状像一把叉子，故称为叉型分岔。

(2)  $\lambda$  沿实轴的上部或下部穿过虚轴，如图 3 (b)。

典型例子是

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases} \quad (19)$$

平衡态(0,0)的稳定性由(17)的右端矩阵

$$\begin{pmatrix} \mu - 3x^2 - y^2 & -1 - 2xy \\ 1 - 2xy & \mu - x^2 - 3y^2 \end{pmatrix}_{(0,0)} = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \quad (20)$$

的特征值决定。(20)的特征值是  $\lambda = \mu \pm i$ 。因此， $\mu < 0$  时 (0,0) 是稳定焦点，而  $\mu > 0$  时变成不稳定焦点。那么新的形态是什么呢？我们作变换  $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，则(19)化为极坐标形式

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r} = 1 \end{cases} \quad (21)$$

(21)式中  $\dot{\theta} = 1$  表示轨线以一定角速度旋转。由  $\dot{r} = 0$  就求出一个新的平衡态  $r = \sqrt{\mu}$ ，它在原相平面(x, y)上是一个半径为  $\sqrt{\mu}$  的圆， $x^2 + y^2 = \mu$ 。这种运动形态是周期的，就是前面说的极限环。图 5 是  $\mu < 0$  和  $\mu > 0$  时的相图，这种分岔叫 Hopf 分岔。

(3)  $\lambda$  沿实轴的两旁趋近  $\text{Re } \lambda = 0$ ，如图 3 (c)。

典型例子是

$$\dot{x} = \mu + x^2 \quad (22)$$

当  $\mu < 0$  时有两个平衡态  $x = -\sqrt{-\mu}$  和  $+\sqrt{-\mu}$ , 它们的特征值分别是负的和正的, 相当于结点和鞍点。而当  $\mu > 0$  时无平衡态, 即相当于鞍点和结点合并。这种分岔叫鞍-结点分岔<sup>[14]</sup>。

从前面我们看到, 湍流常数就是经过几次分岔而形成的, 所以分岔分析是重要的。现在<sup>[6]</sup>已经发现可以用计算 Lyapunov 特征指数的方法定量表征耗散系统各种形态的演化。

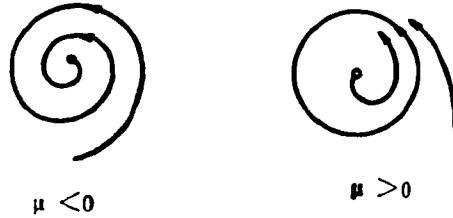


图 5

大气运动的描述远比以上一维或二维例子要复杂得多。但是还是可以作定性分析<sup>[15]</sup>。现在普遍认为对于耗散系统, 状态由高维的相空间最终要收缩到相对低维的相空间去。也就是说系统的宏观形态可以用较少的自由度来描述。这种极少数的状态参数叫序参数<sup>[16]</sup>。Lorenz 和 Charney 用截谱方法分别以三个或六个状态变量来描述有关的大气现象的。

### 五、湍流由多次分岔而形成

目前的很多实验和混沌模型都发现, 似乎湍流是通过多次分岔而形成的。就以 Lorenz 方程<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = xy - bz \end{cases} \quad (23)$$

为例。其中  $r$  是瑞利数,  $\sigma$  是普朗特数,  $b$  是与波数有关的数。Lorenz 取  $\sigma = 10$ ,  $b = 8/3$ 。经计算和分析发现, 当  $\frac{4\sigma - (\sigma + 1)^2}{4\sigma} < r < 1$  时, (23) 的平衡态  $(0, 0, 0)$  是稳定的, 这相当于流体的静止状态, 见图 6 (a)。但当  $r$  稍稍大于 1, 经过叉型分岔而出现两个新的平衡态  $c_1$  和  $c_2(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ , 见图 6 (b)。当  $r$  继续增大,  $c_1$  和  $c_2$  形成两个像蜗牛状的轨线, 见图 6 (c), 这代表对流状态。当  $r = 13.926$  时两个蜗牛状膨胀到两边对称, 见图 6 (d)。当  $r > 24.74$  产生 Hopf 分岔留下一个不稳定的极限环, 轨线不时绕过  $c_1$  和  $c_2$ , 显得无规则, 这就是奇怪吸引子, 形状多么像湍流啊! 见图 6 (e)。

虽然 Lorenz 方程不能显示出能量逐级向高频传输的过程<sup>[17]</sup>, 也未给出湍流复杂结构的细节, 但毕竟算出了混乱的轨迹。不足的是, 大气普朗特数  $\sigma$  只有 0.7, 若  $\sigma = 0.7$ , (23) 就算不出湍流来。我们<sup>[18]</sup>加进速度切变阻尼后, 用  $\sigma = 0.7$  仍然可以模拟出白天和夜晚的大气湍流状态。

现在已经发现, 第四节中的三种典型分岔过程都可以形成湍流<sup>[19]</sup>。

非线性动力学和湍流正在引起愈来愈多的科学工作者的注意<sup>[20]</sup>。我相信气象工作者对这个新动态的关注, 必将促进我国气象科学技术的发展。

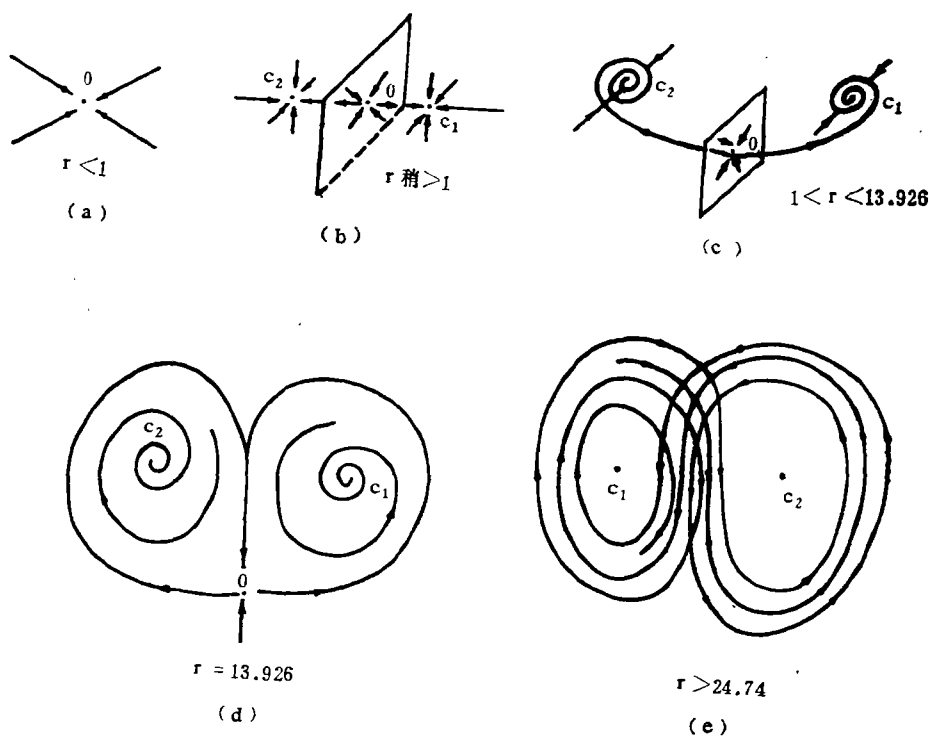


图 6

## 参 考 文 献

- [1] Lorenz, E. N., Deterministic Nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.*, **20**, 130, 1963.
- [2] Ruelle, D., and F. Takens, On the nature of turbulence, *Comm. Math. Phys.*, **20**, 167, 1971.
- [3] Feigenbaum, M. J., The universal metric properties of nonlinear transformation, *J. Stat. Phys.*, **21**, 669, 1979.
- [4] Mandelbrot, B. B., *The fractal geometry of nature*, New York, 1982.
- [5] Nicolis, G., and Y. Prigoging, *Self organization in nonequilibrium systems*, Wiley, 1971.
- [6] Haken, H., *Advanced synergetics*, Springer, 1983.
- [7] 郝柏林, 分岔、混沌、奇怪吸引子、湍流及其它, *物理学进展*, 3期, 1983.
- [8] Lorenz, E. N., Irregularity: a fundamental property of the atmosphere, *Tellus*, **36 A**, 1, 1984.
- [9] 湛星华编, 普利高津和耗散结构理论, 陕西科技出版社, 1982.
- [10] May, R. M., Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature*, **261**, 5560, 459, 1976.
- [11] Heisenberg, W., Nonlinear problems in physics, *Physics Today*, **20**, 5, 27, 1967.
- [12] Lorenz, E. N., On the prevalence of aperiodicity in simple systems, *Lecture notes in Math.* 755, Springer, 1979.
- [13] Charney, J. G., Multiple flow equilibria in the atmosphere and blocking, *J. Atmos. Sci.*, **36**, 1207, 1979.
- [14] Guckenheimer, J., and P. Holmes, *Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcation of vector fields*, Springer, 1983.
- [15] Lorenz, E. N., Attractor sets and quasi-geostrophic equilibrium, *J. Atmos. Sci.*, **37**, 1685, 1980.
- [16] Haken, H., *Synergetics: An introduction*, Springer, 1976.
- [17] Williams, R., The structure of Lorenz attractors, *Lecture notes in Math.* 615, Springer, 1977.
- [18] 刘式达, 内波动力学中的浑沌和大气湍流的发生, *中国科学 (B)*, 第五期, 542-550, 1986.
- [19] Eckmann, J. P., Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. *Review of Modern Physics*, **53**, 643, 1981.
- [20] Barenblatt, G. I., ed., *Nonlinear dynamics and turbulence*, Pitman, 1983.



## NONLINEAR DYNAMICS AND TURBULENCE

Liu Shida

*(Department of Geophysics, Peking University)*

### Abstract

The problem of the onset of turbulence and the description of developed turbulence are basic problem. The recent development of chaotic motions shows that deterministic systems may have solutions which behave irregularly in time. Hence the investigation of chaos becomes especially important in order to explain the turbulence phenomena.

The chaotic turbulent-like behaviour is sensitive to initial conditions and unpredictable after long times.

The behaviour of dissipative systems is very complicated. There are steady attractor, periodic attractor, quasi-periodic attractor, and strange attractor.

The topological nature of the attractors may change as the parameter crosses bifurcation point.

The chaos would appear after a few bifurcations.