

飞机播撒催化剂扩散问题的数值解法*

申 亿 铭 陈 吉 航

(北京气象学院)

提 要

本文利用有限差分法对飞机播撒催化剂的扩散问题进行了求解。在题解中考虑了催化剂质点的下落速度随高度的变化,并将该法与解析解法计算的结果进行了对比分析,找出了它们之间的异同。

一、引 言

在《过冷层状云中飞机播撒催化剂的扩散问题》^[1]一文中我们给出了经过简化后的扩散方程

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} - w \frac{\partial q}{\partial z} = K \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

及定解的初始和边界条件:

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ 时, } q &= Q' \delta(x) \delta(y) \delta(z-H); \\ z=0 \text{ 时, } q &= 0; \\ \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 0 \text{ 时, } q &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 q 为扩散物质的浓度; u 为 x 轴上的分风速; w 为扩散物质的下落速度; K 为湍流扩散系数; t 为时间; Q' 为点源的核生成率; $\delta(x)$ 、 $\delta(y)$ 和 $\delta(z-H)$ 为丢脱函数; H 为源高,即飞机播撒催化剂的高度。

在那篇文章中首先我们应用条件(2)求得了方程(1)的点源解,然后沿 y 轴对 q 积分,求得了过冷层云和层积云中飞机播撒催化剂扩散问题的无限线源的解析解,即

$$q = \frac{Q}{4\pi K t} e^{-\frac{w^2 t}{4K} - \frac{w(z-H)}{2K} - \frac{(x-wt)^2}{4Kt}} \left[e^{-\frac{(z-H)^2}{4Kt}} - e^{-\frac{(z+H)^2}{4Kt}} \right] \quad (3)$$

式中 Q 为单位线源的核生成率。

从(3)式中可以看出,在题解过程中我们做了 w 是常数,即它不随高度发生变化的假定。但是实际上冰晶(立体枝状和平板枝状等雪晶除外)在扩散过程中其尺度是不断增大的,因此相应地必然引起其下落速度的增大。所以,认为 w 是常数的假定是与实际情况不相符的。为了解决冰晶在扩散过程中其下落速度不断增大的问题,本文采用了有限差分(网格法)来解无限线源的扩散问题。

二、差分方程的求解

首先,给出描述扩散问题的抛物型方程

* 本文于1985年4月11日收到,1985年11月23日收到修改稿。

$$\frac{\partial q}{\partial t} = K \left(\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial z^2} \right) - u \frac{\partial q}{\partial x} + w \frac{\partial q}{\partial z} \quad (4)$$

及初始和边界条件:

$$\left. \begin{aligned} t=0 \text{ 时, } q &= Q\delta(x)\delta(z-H); \\ z=0 \text{ 时, } q &= 0 \\ \sqrt{x^2+z^2} \rightarrow \infty \text{ 时, } q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

由于方程是二维问题,如果应用一般的显式格式会产生时间步长要求愈来愈小,计算工作量愈来愈大的困难;如果使用一般的隐式格式,则又要在每一个时间层上解五对角的 $(N-1) \times (M-1)$ 个未知量的方程组,显然没有解三对角方程组那么方便。因此,我们使用了由 Peaceman-Rachford 提出的交换方向上的隐式方法,即通常所称的 $P-R$ 方法^[2-5]。

首先给出时间步长 Δt , x 和 z 轴方向上的步长为 Δx 和 Δz , 并令 $\Delta t = \tau$, $\Delta x = h$ 和 $\Delta z = l$ 。于是就有: $t = n\tau$; $x = \pm jh$ 和 $z = \pm kl$, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots, m_0$; $j = 0, 1, 2, \dots, N$; $k = 0, 1, 2, \dots, M$ 。

现将微分方程(4)变成 $P-R$ 格式的差分方程:

$$\begin{aligned} \frac{q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - q_{j,k}^n}{\frac{1}{2}\tau} &= \frac{K}{h^2}(q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{K}{l^2}(q_{j,k-1}^n - 2q_{j,k}^n + q_{j,k+1}^n) - \\ &\quad - \frac{u}{2h}(q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2l}w_{j,k}^n(q_{j,k-1}^n - q_{j,k+1}^n) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \frac{q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} - q_{j,k}^{n+1}}{\frac{1}{2}\tau} &= \frac{K}{h^2}(q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - 2q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{K}{l^2}(q_{j,k-1}^{n+1} - 2q_{j,k}^{n+1} + q_{j,k+1}^{n+1}) - \\ &\quad - \frac{u}{2h}(q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{2l}w_{j,k}^{n+1}(q_{j,k-1}^{n+1} - q_{j,k+1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (7)$$

上述方程的截断误差为 $(\tau^2 + h^2)$, 其中 $h^2 = h^2 + l^2$ 。

$P-R$ 方法就是先求出过渡层的 $q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$,尔后求出 $q_{j,k}^{n+1}$ 。为此,先固定 k 而让 j 改变,在对每一个 k 都沿 x 方向追赶求解之后,就可以完全定出 $q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}}$ 了;然后再用同样程序固定 j 而让 k 改变,在对每一个 j 都沿 z 方向追赶求解之后,又可以完全定出 $q_{j,k}^{n+1}$ 了。这种格式可以看做是将一个二维问题化为两个一维问题的解法,从而使求解大大简化了。

令 $\frac{\tau K}{2h^2} = \gamma$, $\frac{\tau K}{2l^2} = \mu$, $\frac{\tau}{4h} = \theta$, $\frac{\tau}{4l} = \lambda$, 将它们代入(6)和(7)式,并项后则可得,

$$\begin{aligned} (\gamma - \theta u)q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - (1+2\gamma)q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\gamma + \theta u)q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\mu + \lambda w_{j,k}^n)q_{j,k-1}^n + \\ + (1-2\mu)q_{j,k}^n + (\mu - \lambda w_{j,k}^n)q_{j,k+1}^n = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} (\gamma - \theta u)q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\gamma)q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\gamma + \theta u)q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + (\mu + \lambda w_{j,k}^{n+1})q_{j,k-1}^{n+1} - \\ - (1+2\mu)q_{j,k}^{n+1} + (\mu - \lambda w_{j,k}^{n+1})q_{j,k+1}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

设 $\gamma - \theta u = a$, $1 + 2\gamma = b$, $1 - 2\gamma = b'$, $\gamma + \theta u = c$,

$\mu + \lambda w_{i,k}^{n+1} = \alpha_{i,k}^{n+1}$, $1 - 2\mu = d$, $1 + 2\mu = d'$ 和

$\mu - \lambda w_{i,k}^{n+1} = \beta_{i,k}^{n+1}$ 。于是(8)和(9)式则变为:

$$aq_{i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} - bq_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} + cq_{i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_{i,k}^n q_{i,k-1}^n + dq_{i,k}^n + \beta_{i,k}^n q_{i,k+1}^n = 0 \quad (10)$$

$$\alpha_{i,k}^{n+1} q_{i,k-1}^{n+1} - d'q_{i,k}^{n+1} + \beta_{i,k}^{n+1} q_{i,k+1}^{n+1} + aq_{i-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + b'q_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} + cq_{i+1,k}^{n+\frac{1}{2}} = 0 \quad (11)$$

如将(10)和(11)两式写成矩阵形式,则有

$$Aq_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} = Fq_{i,k}^n \quad (12)$$

$$Bq_{i,k}^{n+1} = Gq_{i,k}^{n+\frac{1}{2}} \quad (13)$$

求解方程组(12)和(13)应满足初始和边界条件,在本文中我们以解析解(3)式所计算的线源附近的理论浓度值作为初始浓度^[6,7],于是时间和空间变量则变为:

$$t = t_0 + n\tau, \quad x = x_0 \pm jh, \quad z = z_0 \pm kl.$$

其中 t_0 为以解析解(3)式计算的催化剂空间浓度的时间界限, x_0 和 z_0 是对应 t_0 的空间座标。于是初始和边界条件就变成:

$$\left. \begin{aligned} n=0 \text{ 时, } q &= q_{i,k}^0 = q_{i,k}^0 \\ z=0 \text{ 时, } q &= q_{i,\frac{z}{l}} = 0 \\ |x| \text{ 和 } |z| \rightarrow \infty \text{ 时, 亦即 } j \text{ 和 } k \rightarrow \infty \text{ 时,} \\ q_{i,\infty}^n &= q_{i,\infty}^n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

应用初始和边界条件(14)解方程(12)和(13)时,系数矩阵 A 和 B 具有下列形式:

$$A = \begin{bmatrix} -b & c & & & \\ a & -b & c & & \\ & a & -b & c & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a & -b & c \\ & & & & a & -b \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$B = \begin{bmatrix} -d' & \beta_{i,k}^n & & & \\ \alpha_{i,k}^n & -d' & \beta_{i,k}^n & & \\ & \alpha_{i,k}^n & -d' & \beta_{i,k}^n & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \alpha_{i,k}^n & -d' & \beta_{i,k}^n \\ & & & & \alpha_{i,k}^n & -d' \end{bmatrix} \quad (16)$$

从(15)和(16)两式中不难看出,系数 A 和 B 均为三对角矩阵,无疑可用追赶法求解。至于方程(12)和(13)的右端项应用初始和边界条件以及以后的逐层计算实为已知值,所以不难求解。

下面给出用追赶法推导出的方程(12)和(13)的计算公式:

1. 固定 k 而让 j 改变,求出的追赶公式为:

$$q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = M_{j,k}^n + N_j q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}} \quad (17)$$

其中

$$M_{j,k}^n = \frac{F_{j,k}^n + \alpha M_{j-1,k}^n}{b - \alpha N_{j-1}}, \quad N_j = \frac{c}{b - \alpha N_{j-1}},$$

$$F_{j,k}^n = \alpha_{j,k-1}^n q_{j,k-1}^n + d q_{j,k}^n + \beta_{j,k+1}^n q_{j,k+1}^n$$

但是当 $j=k=0$ 时, 则有:

$$M_{0,0}^n = \frac{F_{0,0}^n + \alpha q_{-1,0}^{n+\frac{1}{2}}}{b}, \quad N_0 = \frac{c}{b}$$

2. 固定 j 而让 k 改变, 可求如下的追赶公式:

$$q_{j,k}^{n+1} = H_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + R_{j,k+1}^{n+1} q_{j,k+1}^{n+1} \quad (18)$$

其中

$$H_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{G_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_{j,k-1}^{n+1} H_{j,k-1}^{n+\frac{1}{2}}}{d' - \alpha_{j,k-1}^{n+1} R_{j,k}^{n+1}}$$

$$R_{j,k+1}^{n+1} = \frac{\beta_{j,k+1}^{n+1}}{d' - \alpha_{j,k-1}^{n+1} R_{j,k}^{n+1}}$$

$$G_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} = \alpha q_{j-1,k}^{n+\frac{1}{2}} + b' q_{j,k}^{n+\frac{1}{2}} + c q_{j+1,k}^{n+\frac{1}{2}}$$

但是当 $j=k=0$ 时, 则有

$$H_{0,0}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{G_{0,0}^{n+\frac{1}{2}} + \alpha_{0,-1}^{n+1} H_{0,-1}^{n+\frac{1}{2}}}{d'}$$

$$R_{0,0}^{n+1} = \frac{\beta_{0,1}^{n+1}}{d'}$$

至于冰晶的初始下落速度, 在认为冰晶是球形质点的情况下我们是利用下面的牛顿公式计算的,

$$w = 1.15 \left(\frac{Td}{P} \right)^{\frac{1}{2} [8]}$$

其中 T 为温度, P 为气压, d 为冰晶直径。

当冰晶的初始直径为 0.1 和 0.3 mm 时, 计算得到的下落速度分别为 7 和 12 cm/s。而给定边界高度上的冰晶下落速度则取自 Magono^[9] 的实验数据, 它们分别为 60 和 70 cm/s。根据上面两个高度上的冰晶下落速度和高度差我们确定了冰晶下落速度的步长和相应的计算公式:

$$w_{j,k}^n = w_0 + m s$$

其中 s 为下落速度的步长, m 为步数。

三、计算结果及分析

前面已经提到, 我们把应用解析解(3)式所计算的线源附近的理论浓度值做为初始浓

度。在计算中实际上是以解析解(3)计算的一分钟的浓度分布做为初始值,这样就要求在计算中两种方法所使用的参数完全一致,其中初始下落速度分别为7和12 cm/s,而湍流系数分别为20和40 m²/s, $u=6$ m/s,干冰的核生成率为10¹²量级。计算中使用的步长为5 min,水平步长为1800 m,垂直步长为50 m,而下落速度的步长分别为1.325 cm/s³(当 $w_0=7$ cm/s 时)和1.45 cm/s(当 $w_0=12$ cm/s 时)。

使用方程(1)的差分解,并利用上述步长和参量,我们计算了湍流系数 $K=20$ m²/s 和 $K=40$ m²/s, 初始下落速度为 $w_0=7$ cm/s 和 $w_0=12$ cm/s 时催化剂的扩散情况,其结果分别绘于图1、图2、图3和图4上。

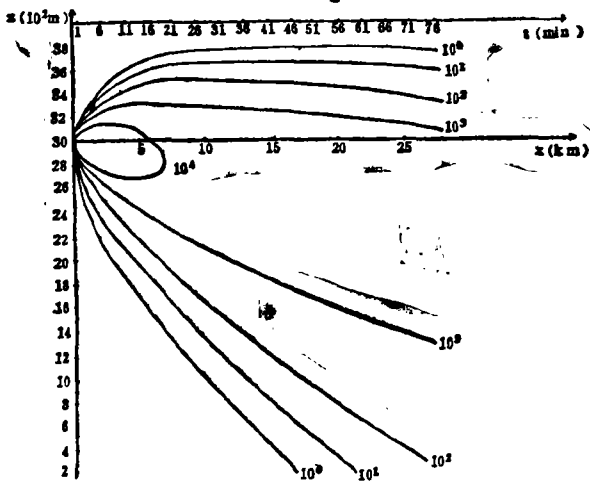


图1 冰晶浓度空间分布垂直剖面图

($w_0=7$ cm/s, $K=20$ m²/s)

(冰晶浓度以个/L表示,10⁰为扩散边缘,它代表每升中有一个冰晶质点。依此类推,以下同。)

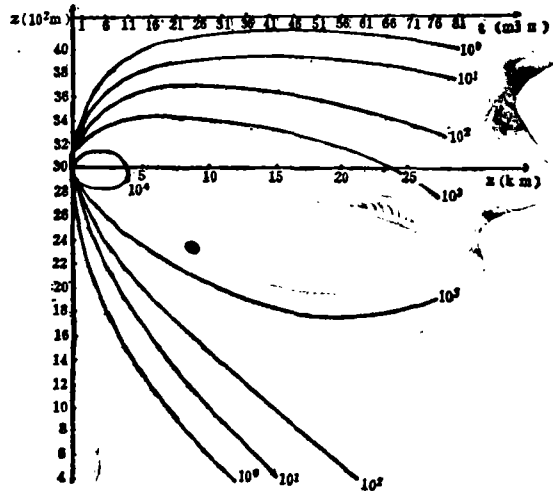


图2 冰晶浓度空间分布垂直剖面图

($w_0=7$ cm/s, $K=40$ m²/s)

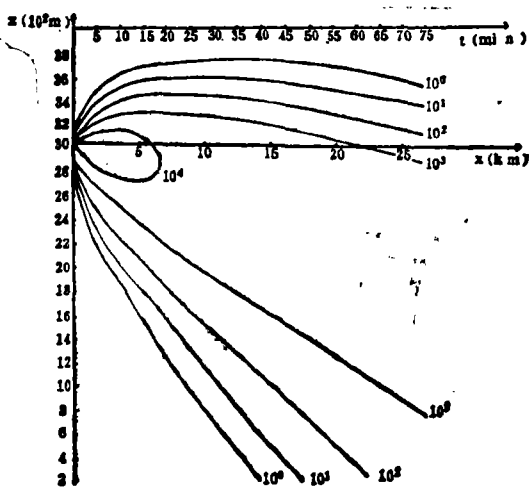


图3 冰晶浓度空间分布垂直剖面图

($w_0=12$ cm/s, $K=20$ m²/s)

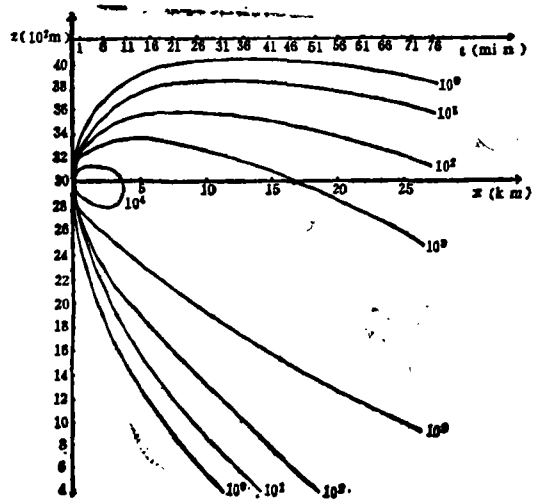


图4 冰晶浓度空间分布垂直剖面图

($w_0=12$ cm/s, $K=40$ m²/s)

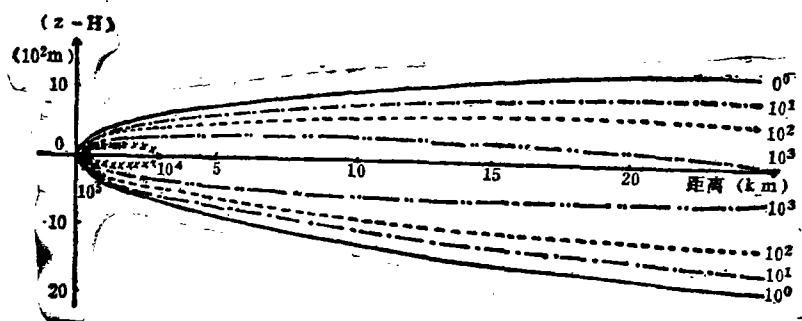


图 5 冰晶浓度空间分布垂直剖面图
($w_0 = 7 \text{ cm/s}$, $K = 20 \text{ m}^2/\text{s}$)

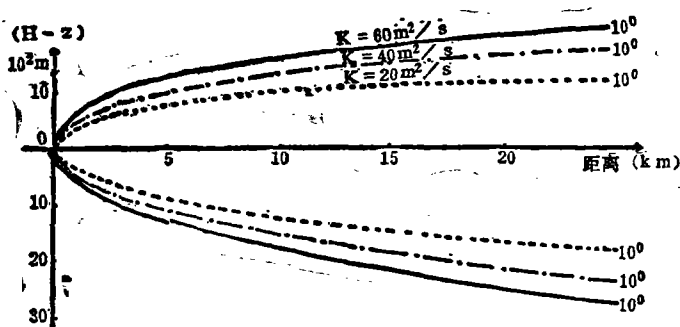


图 6 不同湍流系数情况下的冰晶扩散范围
($w_0 = 7 \text{ cm/s}$)

为了了解两种方法计算结果的异同，我们将差分法和解析解法所计算的结果进行了比较，从中可以看出下面几点的共同点和差异：

第一，应用两种方法计算的催化剂的扩散规律和特征基本一致（见图 1—图 6 其中图 5 和图 6 为解析解法计算结果），其主要表现在：

- 1) 扩散形状都是抛物型的；
- 2) 催化剂浓度的量级是相同的；
- 3) 以播撒高度为界扩散区都是上小下大；
- 4) 催化剂中心轴线浓度等值线都是向下倾斜的；
- 5) 当其它参量相同时，湍流系数愈大，其扩散范围也愈大。

第二，两种方法计算结果的明显差异是：在播撒高度以上（即 3000 m 以上）用差分法计算的催化剂扩散范围略小于用解析解法计算的催化剂扩散范围；相反，在播撒高度以下用差分法计算的催化剂扩散范围又超过用解析解法计算的催化剂扩散范围。举例：以 30 min 时的扩散范围为例，当 $w_0 = 7 \text{ cm/s}$ 和 $K = 20 \text{ m}^2/\text{s}$ 时，在播撒高度以上应用解析解法计算的催化剂扩散范围是 950 m，而用差分解法计算的扩散范围是 750 m，相差约 200 m；在播撒高度以下用解析解法计算的催化剂的扩散范围为 1200 m，而用差分解法计算的扩散范围为 2060 m，显然后者大大超过前者，相差 800 m 左右。这些都是由于下落速度随高度和时间的不断变化而引起的结果。与此相应轴线浓度等值线相对播撒高度的倾斜程度

也是后者大于前者。

第三,当各种参数均相同时,在播撒高度以下催化剂浓度的衰减速度,用差分计算的结果均小于用解析解计算的结果。这是由于催化剂剂量相同而扩散范围不等所造成的差异,显然扩散范围大时浓度衰减的慢,而扩散范围小时浓度衰减的快。

从以上两种方法计算结果的对比分析来看,可以得出明确的结论,在研究云中催化剂的扩散时考虑它们的下落速度随高度和时间的变化是必要的。

参 考 文 献

- [1] 申亿铭, 过冷层状云中飞机播撒催化剂的扩散问题, 气象科学技术集刊 (2), 17—26 页, 气象出版社, 1982 年。
- [2] G. E. 福王斯, W. R. 华沙著, 胡祖焯、吴文达、陈永和译, 偏微分方程的有限差分法, 458—460 页, 上海科技出版社, 1964 年。
- [3] B. K. 萨乌里耶夫著, 袁朝鼎译, 抛物型方程的网格积分法, 95—104 页, 科学出版社, 1963 年。
- [4] 武汉大学、山东大学编, 计算方法, 293—294 页, 人民教育出版社, 1979 年。
- [5] 李荣华、冯果忱编, 微分方程数值解法, 351—353 页, 人民教育出版社, 1980 年。
- [6] Арраго, Л. Р., и М. Е. Швец, К вопросу распространения тяжёлой однородной примеси из высотного источника, Труды, ЛГМИ, № 5, 47—51, 1963.
- [7] Берлянд, М. Е., и другие, Численное решение уравнения турбулентной диффузии и расчёт затрясения атмосферы вблизи промышленных предприятий, тр., ГГО, 5—10, 1963.
- [8] Fukuta, N. W. A. Schmeling and L. P. Evans, Experimental determination of the ice nucleation by falling dry icy pellets, International conference on weather modification, 22, 1971.
- [9] B. J. 梅森著, 中国科学院大气物理研究所译, 云物理学, 242 页, 科学出版社, 1978 年。

NUMERICAL SOLUTION TO THE DIFFUSIVE PROBLEM OF THE CATALYTIC AGENT RELEASED BY THE AIRPLANE

Shen Yiming Chen Jihang

(Beijing Meteorological Institute)

Abstract

By using the finite-difference method, a solution is obtained in this paper to the diffusion problem of the catalytic agent released by the airplane. The changes of falling speed of the catalytic agent with altitude are taken into full consideration, and their variations in change are found. The results of this method are compared with those of the analytic solution.