第44卷 第1期 气 象 学 报 Vol. 44, No. 1
1986年2月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Feb., 1986

边界层中风速向Ekman气流的调整*

徐银梓 伍荣生

(南京大学气象系)

在自由大气中,风压场之间基本上是满足地转平衡的,但在某些局部地区,可以出现地转偏差,而这些偏差通过惯性重力外波的频散作用将最终消灭而建立起地转平衡。这种适应过程已有很多的研究。与自由大气中的准地转气流的特征相似,在边界层中,在三种力即折向力、气压梯度力和湍流粘性力的平衡下,风场呈现Ekman气流,即风速矢量端迹呈现Ekman螺线。类似于地转适应问题的提法,在边界层中,也存有Ekman气流的适应问题。即当初始场在某种原因下,风场、压力场之间与Ekman气流有一定的偏差时,则这种偏差将如何变化?通过什么作用而建立起Ekman平衡?目前,对于此问题则是讨论不多。我们利用一个最简单的模式,对于这种调整作一初步的分析。

1. 问题的提出

边界层中的水平运动线性化方程组可写成

$$\frac{\partial u}{\partial t}=fv-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-fu-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{2}$$

其中u,v为x,y方向的风速分量,f为柯氏参数,p为气压,ρ为密度,k为湍流涡粘系数。在以下的处理中,均假定f,ρ,k为常数。

假设边界层是正压的,则在此层内气压梯度力不随高度而变化。若用u_g,v_g表示地转风在x,y方向的分量,则(1)、(2)式可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=f(v-v_g)+k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{3}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}=-f(u-u_g)+k\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \tag{4}$$

对于(3)、(4)式的初始条件可设计如下:

$$t=0, u=u_g(1-e^{-\alpha z}) \tag{5}$$

$$v=v_g(1-e^{-\alpha z}) \tag{6}$$

式中α为参数。这样的风场有以下特点:

1.
$$z=0, u=v=0 \tag{7}$$

$$z\to\infty, u\to u_g, v\to v_g \tag{8}$$

我们取(7)、(8)式作为(3)、(4)式的边界条件。

2. 当$\alpha=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$时,(5)、(6)式所示与经典Ekman风速分布相同,当$\alpha\neq\frac{1+i}{\sqrt{2}}$,例如取$\alpha$为某一正实

* 本文于1984年3月10日收到,1984年12月10日收到修改稿。

数时，则初始风场便偏离经典 Ekman 气流。现在的问题是研究这种不满足 Ekman 气流的风速将怎样变化。

2. 运动的终态

首先，我们定性地了解一下，这种非 Ekman 平衡的气流经过演变之后，最后将达到何种特征的运动。

设 π 为位势高度的偏差值，在正压的条件下，π 不随高度而变。用地转风 u_g, v_g 表示 π 的梯度分量，即

$$\frac{\partial \pi}{\partial x}=f v_g,\ \frac{\partial \pi}{\partial y}=-f u_g \tag{9}$$

于是，由(3)、(4)式可得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-fD+k\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \tag{10}$$

$$\frac{\partial D}{\partial t}=f\zeta-\nabla^2\pi+k\frac{\partial^2 D}{\partial z^2} \tag{11}$$

式中 ζ, D 分别为相对涡度和散度，即

$$\zeta=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},\ D=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y} \tag{12}$$

现引入流函数 Ψ 和速度势 ϕ，于是

$$u=-\frac{\partial \Psi}{\partial y}+\frac{\partial \phi}{\partial x},\ v=\frac{\partial \Psi}{\partial x}+\frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{13}$$

由此可得

$$\zeta=\nabla^2\Psi,\ D=\nabla^2\phi \tag{14}$$

将(14)式代入(10)、(11)式，得到

$$\nabla^2\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}+f\phi-k\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{15}$$

$$\nabla^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}-f\Psi+\pi-k\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)=0 \tag{16}$$

对于波动过程而言，拉普拉斯算子 ∇^2 正比于波矢的模的平方，故 ∇^2 可去掉，从而有

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}+f\phi-k\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t}-f\Psi+\pi-k\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0 \tag{18}$$

相应地(5)—(8)可化为：

$$t=0,\varphi=0,\Psi=\frac{\pi}{f}(1-e^{-az}) \tag{19}$$

$$z=0,\varphi=0,\Psi=0 \tag{20}$$

$$z\to\infty,\varphi=0,\Psi=\frac{\pi}{f} \tag{21}$$

对于(17)、(18)可得定常解 $\overline{\Psi}$、$\overline{\varphi}$，它满足

$$f\overline{\varphi}-k\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial z^2}=0 \tag{22}$$

$$f\overline{\Psi}-\bar{\pi}+k\frac{\partial^2\overline{\varphi}}{\partial z^2}=0 \tag{23}$$

这种定常解或说平衡态的解，实际上就是经典 Ekman 解。从(22)、(23)式消去 $\overline{\varphi}$，得到

$$\frac{\partial^4 \overline{\Psi}}{\partial z^4}+\frac{f^2}{k^2}\overline{\Psi}=\frac{f}{k^2}\overline{\pi} \tag{24}$$

在边值

$$z=0, \overline{\Psi}=0, \overline{\varphi}=0 \tag{25}$$

$$z\to\infty,\ \overline{\varphi}=0,\ \overline{\Psi}=\frac{\overline{\pi}}{f} \tag{26}$$

的条件下，(24)式的解为

$$\overline{\Psi}=-\frac{\overline{\pi}}{2f}\left(e^{-\sqrt{\frac{fi}{k}}z}+e^{\sqrt{\frac{-fi}{k}}z}-2\right) \tag{27}$$

从(22)可得

$$\overline{\varphi}=-\frac{i\overline{\pi}}{2f}\left(e^{-\sqrt{\frac{fi}{k}}z}-e^{\sqrt{\frac{-fi}{k}}z}\right) \tag{28}$$

因此，对于给定的 $\overline{\pi}$ 场，就可求得相应的 $\overline{\Psi}$ 与 $\overline{\varphi}$ 场，利用(13)式，可求得风场为

$$\overline{u}+i\,\overline{v}=(u_g+iv_g)\left(1-e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}(1+i)z}\right) \tag{29}$$

这就是经典的 Ekman 气流。

3. 非平衡成分的变化

在 π 不随高度且不随时间变化时($\pi(x,y)=\overline{\pi}(x,y)$)，令

$$w=\Psi-\frac{\pi}{f}+i\varphi \tag{30}$$

则(17)与(18)式可合并写为

$$\frac{\partial w}{\partial t}=ifw+k\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \tag{31}$$

与(19)—(21)式相应的初边值条件为

$$t=0, w=-\frac{\pi}{f}e^{-az} \tag{32}$$

$$z=0,\ w=-\frac{\pi}{f} \tag{33}$$

$$z\to\infty, w=0 \tag{34}$$

用拉普拉斯变换法可解得

$$\begin{aligned} w=-\frac{\pi}{2f}\Big[&e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}(1-i)z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{\frac{ft}{2}}+i\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)+e^{\sqrt{\frac{f}{2k}}(1-i)z}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}\right.\\ &\left.+\sqrt{\frac{ft}{2}}-i\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)\Big]+\frac{\pi}{2f}e^{ift}e^{ka^2t}\Big\{e^{az}\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{ka^2t}\right)\\ &+e^{-az}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{ka^2t}\right)-2\right]\Big\} \end{aligned} \tag{35}$$

令 $t\to\infty$，得到

$$W\to-\frac{\pi}{f}e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}(1-i)z} \tag{36}$$

将(27)、(28)式代入(30)式，得平衡态的 w 为

$$\overline{w}=\overline{\Psi}-\frac{\pi}{f}+i\,\overline{\varphi}=-\frac{\pi}{f}e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}(1-i)z} \tag{37}$$

比较(36)式与(37)式知，我们的解(35)式的终态正好是 Ekman 气流。这就用解析的方法再次证明了运动的终态为 Ekman 气流这一结论。

下面我们近似地看一看非平衡成分是如何变化的。

利用近似公式

$$\mathrm{erf}\,c(x+iy)=1-\mathrm{erf}(x+iy)\approx1-\left[\mathrm{erf}(x)+\frac{1}{2\pi x}e^{-x^2}(1-\cos 2xy+i\sin 2xy)\right] \tag{38}$$

由(35)式可近似地得到：

$$\begin{aligned}\frac{2f}{\pi}w=&-e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\left(\cos\sqrt{\frac{f}{2k}}z+i\sin\sqrt{\frac{f}{2k}}z\right)\Bigg\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)\\&-\frac{1}{2\pi\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)}e^{-\left(\frac{z^2}{4kt}-\sqrt{\frac{f}{2k}}z+\frac{ft}{2}\right)}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{f}{2k}}z-ft\right)+i\sin\left(\sqrt{\frac{f}{2k}}z-ft\right)\right]\Bigg\}\\&+e^{\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\left(\cos\sqrt{\frac{f}{2k}}z-i\sin\sqrt{\frac{f}{2k}}z\right)\Bigg\{1-\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)\\&-\frac{1}{2\pi\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)}e^{-\left(\frac{z^2}{4kt}+\sqrt{\frac{f}{2k}}z+\frac{ft}{2}\right)}\left[1-\cos\left(\sqrt{\frac{f}{2k}}z+ft\right)+i\sin\sqrt{\frac{f}{2k}}z+ft\right)\right]\Bigg\}\\&+(\cos ft+i\sin ft)e^{ka^2t}\Bigg\{e^{az}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{ka^2t}-e^{-az}\right[1+\\&+\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{ka^2t}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{39}$$

令 D_1 表示非平衡成分的势流部分

$$D_1=\frac{2f}{\pi}(\varphi-\overline{\varphi}) \tag{40}$$

改写(28)式为实数形式

$$\overline{\varphi}=-\frac{\pi}{f}e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\sin\sqrt{\frac{f}{2k}}z \tag{41}$$

而 φ 为 w 的虚部，于是

$$\begin{aligned}D_1=\sin ft\Bigg\{&\frac{-2z\sqrt{kt}}{\pi(z^2-2kft^2)}e^{-\left(\frac{z^2}{4kt}+\frac{ft}{2}\right)}+e^{ka^2t}\left[e^{az}\left(1-\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{ka^2t}\right)\right)\right.\\&\left.-e^{-az}\left(1+\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{ka^2t}\right)\right)\right]\Bigg\}+\sin\sqrt{\frac{f}{2k}}z\Bigg\{\frac{2z\sqrt{kt}}{\pi(z^2-2kft^2)}e^{-\left(\frac{z^2}{4kt}+\frac{ft}{2}\right)}+\\&+e^{-\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\left[1+\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}-\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)\right]-e^{\sqrt{\frac{f}{2k}}z}\left[1-\mathrm{erf}\left(\frac{z}{\sqrt{4kt}}+\sqrt{\frac{ft}{2}}\right)\right]\Bigg\}\end{aligned} \tag{42}$$

上式右端第一大项表示惯性振荡，频率为 f，其振幅随 t 增大而趋于零。第二大项也随 t 增大而趋于零。两大项中均包含惯性振荡频率 f 和湍流涡粘系数 k，说明非平衡成分是通过惯性振荡和湍流粘性耗散

作用而消灭的。

再取 $z=\pi\sqrt{\frac{2k}{f}}$,则(42)式右端第二大项为零,当 t 充分大时,得到

$$D_1 \approx -\sqrt{\frac{2\pi}{f}}\frac{1}{a^2kt^{3/2}}\sin ft \tag{43}$$

将此式与地转适应的例子进行比较，可得到以下一些新的结论。

4. 结 论

从上节可知，非 Ekman 平衡成分，通过惯性振荡和湍流粘性耗散作用而消灭，最终风速总调整到 Ekman 气流；这是我们的第一结论。

在地转适应的例子中[1],有近似关系：

$$\varphi(0,0,t) \sim \frac{1}{t}\cos ft \tag{44}$$

式中 $\varphi(0,0,t)$为初始时刻具有强烈非地转平衡成分的中心点(0,0)处的势函数。而由(43)可得

$$D_1 \sim \frac{1}{t^{3/2}}\sin ft \tag{45}$$

比较(44)与(45)式分母中 t 的次数,我们得到第二结论:Ekman 适应过程要比地转适应过程为快。

另外,由(5)、(6)式知,a 愈大,使 u , v 接近 u_g,v_g的高度便愈低，表示边界层愈薄。这是因为风速接近 u_g,v_g 处,风压场之间成立准地转关系,湍流粘性作用已是很小而可略了。再由(43)式可知，此时 $|D_1|$愈小,或说使 D_1 达到某一小量所需的 t 愈小,故我们有第三结论:边界层愈薄，Ekman 适应愈快。

由于我们假设了气压场是不随时间变化的,因此未能考虑自由大气和边界层的相互制约关系，若能把这两层联系起来一并研究将是更有意义的。

参 考 文 献

[1] 伍荣生等,动力气象学,上海科学技术出版社.1983。