

## 最优测站距离、最优垂直分层和最优观测时间 间隔的决定\*

廖洞贤\*\*

(国家气象局)

### 提 要

考虑观测误差、截断误差和数值天气预报的需要, 本文给出了决定最优相邻测站之间距离  $\hat{d}$ 、最优垂直网格距  $\Delta\hat{p}$  和最优观测时间间隔  $\Delta\hat{t}$  的公式。这些公式和预报所考虑的最短波长, 以及最大观测误差和波幅的比有关, 对于不同尺度的天气系统, 结果很不一样。

对于过滤大气模式,  $\hat{d}$ ,  $\Delta\hat{p}$ ,  $\Delta\hat{t}$  的值和世界气象组织对全球观测系统所要求的相近; 但对于原始方程大气模式,  $\Delta\hat{t}$  的值则远比过滤大气模式的为小。因而, 用现有常规观测系统研究大气运动的快过程并不适宜, 只能借助于以地面为基础的和以空间为基础的最优的混合观测系统才有可能。

### 一、引 言

制作天气预报首先需要观测资料。资料的精度、观测时次和测站分布对预报的准确率影响很大。不言而喻, 精度高的资料对天气预报, 特别是对数值天气预报很有利, 但极不均匀的测站分布和稀少记录对预报则很不利。尽管人们开始用天气图作预报后不久就有这种经验, 但把这问题作为数学物理问题来研究的却很少。

1970年, Alaka<sup>[1]</sup>, Drozdov 和 Spelevskij<sup>[2]</sup>曾在概率统计和气候学的基础上, 给出决定相邻测站间的允许距离的公式。由于公式中没有考虑数值天气预报的需要, 这些公式只能用来设计气候站网。

1983年, 作者和某些同志曾根据数值天气预报的需要, 推导出适合于水平面的, 决定最优观测时间间隔和相邻测站间的最优距离的公式<sup>[3]</sup>, 但没有考虑垂直方向的情况。因此, 上述问题并没有完全解决。

另一方面, 为了直接预报由较小尺度系统引起的天气, 数值预报工作者趋向于把网格距取得愈来愈小(如小于50公里)。到底网格距应当小到什么程度, 是否有一定限制? 这也是一个待解决的问题。

下面我们将讨论上面提出的问题。

\* 本文于1983年12月20日收到, 1984年4月23日收到修改稿。

\*\* 王五在、曹姜和同志参加部份工作。

## 二、基本关系式

如果测站的位置和所有的格网点重合,则测站网可以看作格网,相邻测站之间的距离就是格网距。因此,下面我们只要讨论格网距就可以了。

我们知道,任一函数  $f(x, y, p, t)$  的中央差商  $\nabla_x f$ , 在准确到二阶精度的情况,可以近似地写成

$$\nabla_x f = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \Delta x^2 \quad (1)$$

其中  $\nabla_x f = \Delta_x f / 2 \Delta x$ ,  $\Delta_x f = f_{i+1} - f_{i-1}$ ,  $\Delta x = x/i$ ,  $i = 0, 1, \dots, L$ 。

如  $f$  表示某一气象要素,其观测误差是  $e$ ,其真值是  $\hat{f}$ ,则

$$f = \hat{f} + e \quad (2)$$

把上式代入(1)式,则

$$\nabla_x f - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} = \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \hat{f}}{\partial x^3} \Delta x^2 + \nabla_x e \quad (3)$$

同样,用  $y, p$  和  $t$  分别代替上式中的  $x$ ,我们还可以得到类似的表达式。

在(3)式中,其右端第一项表示用中央差商代替微商所引起的截断误差,其第二项表示观测误差的差商。容易看出,截断误差随  $\Delta x$  的增大而增大,而观测误差的差商却随  $\Delta x$  的增大而减小。看来,在某时间  $T_0$  和整个计算域内,存在着一个最优的格网距,使所有格网点上的  $\nabla_x f - \partial \hat{f} / \partial x$  的平方的和为最小。如果对  $y, p$  和  $t$  的类似的量也这样,则可以令

$$F = \sum_{\tau=0}^{\hat{T}} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \left\{ \left( \nabla_x f - \frac{\partial \hat{f}}{\partial x} \right)^2 + a_1 \left( \nabla_y f - \frac{\partial \hat{f}}{\partial y} \right)^2 + a_2 \left( \nabla_p f - \frac{\partial \hat{f}}{\partial p} \right)^2 + a_3 \left( \nabla_t f - \frac{\partial \hat{f}}{\partial t} \right)^2 \right\} \quad (4)$$

并要求  $F = \text{最小}$ 。这样,就需要

$$\frac{\partial F}{\partial \Delta x} = 0, \frac{\partial F}{\partial \Delta y} = 0, \frac{\partial F}{\partial \Delta p} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial F}{\partial \Delta t} = 0 \quad (5)$$

于是

$$\sum_{\tau=0}^{\hat{T}} \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \left\{ \frac{1}{18} \left( \frac{\partial^3 \hat{f}}{\partial x^3} \right)^2 \Delta x^3 + \frac{1}{12} \frac{\partial^3 \hat{f}}{\partial x^3} \Delta_x e - \frac{1}{4} (\Delta_x e)^2 \frac{1}{\Delta x^3} \right\}_{i,k}^{(\tau)} = 0, \quad (6)$$

其中  $\nabla_y( ) = \Delta_y( ) / 2 \Delta y$ ,  $\Delta_y( ) = ( )_{i,j+1,k}^{(\tau)} - ( )_{i,j-1,k}^{(\tau)}$ ,  $j = y / \Delta y$ ,  $j = 1, \dots, M$ ;  
 $\nabla_p( ) = \Delta_p( ) / 2 \Delta p$ ,  $\Delta_p( ) = ( )_{i,k+1}^{(\tau)} - ( )_{i,k-1}^{(\tau)}$ ,  $k = p / \Delta p$ ,  $k = 1, \dots, N$ ;  
 $\nabla_t( ) = \Delta_t( ) / 2 \Delta t$ ,  $\Delta_t( ) = ( )_{i,k}^{(\tau+1)} - ( )_{i,k}^{(\tau-1)}$ ,  $\tau = t / \Delta t$ ,  $\tau = 0, 1, \dots, \hat{T}$ ;  $a_1, a_2, a_3$  是权重系数。

在(6)式中,如果用  $y, p, t$  分别代替  $x$ ,用  $\Delta y, \Delta p, \Delta t$  分别代替  $\Delta x$ ,用  $\Delta_y e, \Delta_p e, \Delta_t e$  分别代替  $\Delta_x e$ ,我们还可以得到另外三个形式完全相似的表达式。

(6) 式是本文的基本关系式。利用它们,如  $\hat{f}$  和  $e$  的函数形式已知, 则我们可以求

出最优的  $\Delta x, \Delta y, \Delta p$  和  $\Delta t$ 。

### 三、决定最优测站距离和最优垂直格网距的公式

#### 1. $\hat{f}$ 和 $\varepsilon$ 的函数形式

考虑气象要素的分布和其随时间的演变通常都呈波动的形式, 我们设

$$\hat{f} = A \sin(lx + my + np - \Omega t) \quad (7)$$

其中  $A$  是波幅,  $l, m, n$  各是沿  $x, y$  和  $p$  方向的波数,  $l = 2\pi/L_x, m = 2\pi/L_y, n = 2\pi/L_p$ ,  $L_x, L_y, L_p$  各是  $x, y$  和  $p$  方向的波长,  $\Omega$  是频率,  $\Omega = 2\pi/T, T$  是周期。

$\varepsilon$  的函数形式一般说来很复杂, 为了便于讨论, 下面我们只考虑两种情形。

##### 1) 情形 1

$$|\Delta_x \varepsilon| = |\Delta_y \varepsilon| = |\Delta_p \varepsilon| = |\Delta_t \varepsilon| = B \quad (8)$$

其中  $B = \text{常数}$ 。如令  $\varepsilon_{\max} = \max_{i,j,k,\tau} |\varepsilon_{i,j,k}^{\tau}|$ , 则

$$0 \leq B \leq 2\varepsilon_{\max} \quad (9)$$

##### 2) 情形 2

$$\varepsilon = E \sin(l_1 x + m_1 y + n_1 p - \Omega_1 t) \quad (10)$$

其中  $l_1, m_1, n_1$  和  $\Omega_1$  各表示  $\varepsilon$  沿  $x, y, p$  方向的波数和其频率。

#### 2. 最优的 $d$ 和 $\Delta p$ 的决定

##### 1) 情形 1

为了简便, 设计算域沿  $x$  方向的长度为  $\hat{n}L_x$ ,  $\hat{n}$  是正整数。把(7)和(8)代入关系式(6), 取  $B = 2\varepsilon_{\max}$ , 并利用三角公式

$$\sum_{i=1}^M \cos(lx_i + my_j + np_k - \Omega t_\tau) = 0 \quad (11)$$

和

$$\sum_{i=1}^M \cos^2(lx_i + my_j + np_k - \Omega t_\tau) = \frac{M}{2} \quad (12)$$

我们可以得到

$$d = \frac{L}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon_{\max}}{4A}} \quad (13)$$

如用  $p$  代替  $x$ , 利用(6)式, 还可以得到

$$\Delta p = \frac{L_p}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3\varepsilon_{\max}}{4A}} \quad (14)$$

这里我们已假设了  $\Delta x = \Delta y = d, L_x = L_y = L$ 。

如果数值天气预报中须考虑的最短的沿  $X$  方向和垂直方向的波长各是  $L_{\min}$  和  $(L_p)_{\min}$ , 而这时最优的测站距离和垂直格网距各记作  $\hat{d}$  和  $\Delta \hat{p}$ , 则有

$$\hat{d} = \frac{L_{\min}^3}{\pi} \sqrt{\frac{3 e_{\max}}{4 A}} \quad (15)$$

和

$$\Delta \hat{p} = \frac{(L_p)_{\min}^3}{\pi} \sqrt{\frac{3 e_{\max}}{4 A}} \quad (16)$$

根据(15)式,如 $e_{\max}/A=1/10$ ,则 $\hat{d}$ 随 $L_{\min}$ 变化的曲线和设 $L_{\min}=10^3$ 千米, $\hat{d}$ 随 $e_{\max}/A$ 变化的曲线各如图1和图2所示。比较这两张图我们可以看出, $\hat{d}$ 随 $L_{\min}$ 的变化远大于随比值 $e_{\max}/A$ 的变化。因此,我们可以初步认为, $\hat{d}$ 主要决定于 $L_{\min}$ 。这是(15)

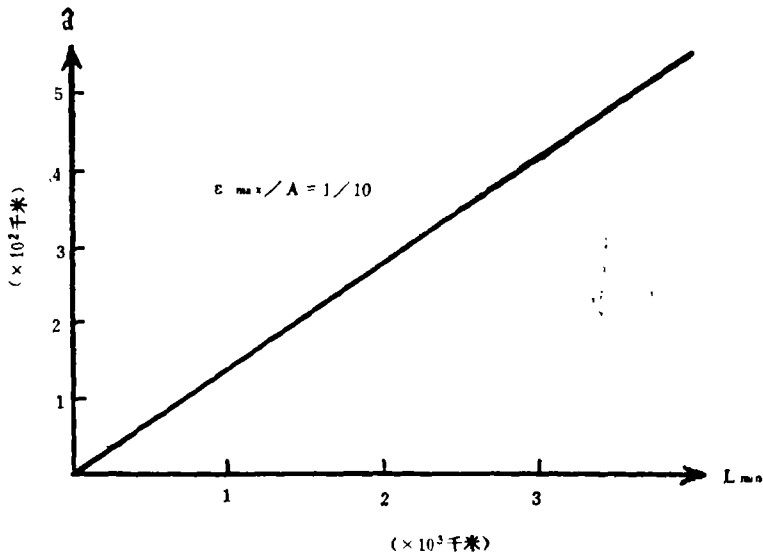


图 1

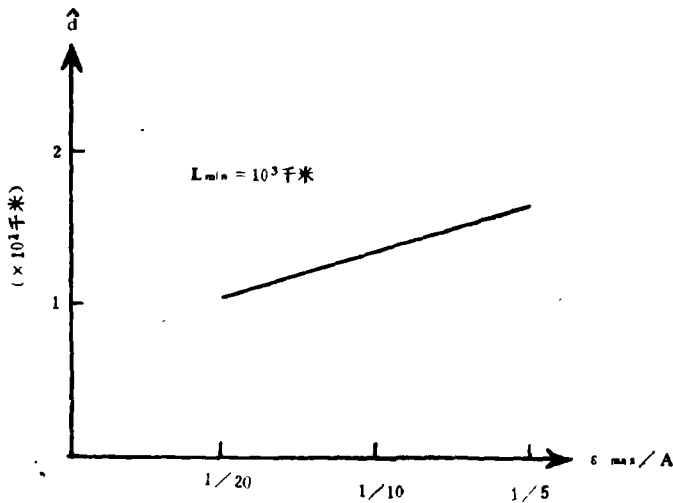


图 2

式和文献[1]、[2]中推导的公式的本质的不同。在后两文中求出的测站距离只决定于观测值的标准偏差的均方根，和水平波长无关。

(16)式和(15)式相似。如令 $(L_p)_{\min}=10^3$ 毫巴，则 $\Delta\hat{p}$ 随 $e_{\max}/A$ 的变化，完全和图2一样，只要我们用 $\Delta\hat{p}$ 代替 $\hat{d}$ ，用毫巴代替千米就可以了。这时，如仍令 $e_{\max}/A=1/10$ ，则对于 $(L_p)_{\min}=1000$ 毫巴的波， $\Delta\hat{p}\approx 130$ 毫巴。这相当于把大气分为8层；如取 $(L_p)_{\min}=500$ 毫巴，则大气可分为15—16层。

## 2)情形2

把(7)和(10)式代入关系式(6)，考虑 $l_1, m_1, n_1$ 远大于 $l, m, n$ 的情况，如再设 $\Omega \asymp \Omega_1$ ，则我们有

$$\hat{d} = \frac{L_{\min}}{\pi} \sqrt[3]{\frac{3}{4} \mu \frac{E}{A}} \quad (17)$$

其中 $\mu = \frac{1}{2} \sqrt{2} |\sin l_1 d|$ 。

比较(17)式和(15)式，我们可以看出，如用 $E$ 代替 $e_{\max}$ ，二者之间只差一恒小于 $\sqrt{2}/2$ 的因子 $\mu$ 。当 $e$ 的波长为 $2d$ 时， $\mu=0.7071$ 。这是其可能的最大值。不过，这时 $\mu$ 对 $\hat{d}$ 的影响不大。比如，当 $L_{\min}=10^3$ 千米， $e_{\max}/A=1/10$ 时，按(15)式， $\hat{d}\approx 130$ 千米，而按(17)式， $\hat{d}\approx 118$ 千米，只减小了约 $1/10$ ！

根据第2节中的讨论，前面关于决定最优测站距离的公式也可以用来决定格网距。从(6)式可以看出，对于一定的 $L_{\min}$ 和 $\hat{f}$ ， $e$ 的函数形式， $\hat{d}$ 是一定的。所以，用缩小格网距的办法来提高计算精度有一定的限制，到一定程度就不可以了。

## 四、决定最优观测时间间隔的公式

现在，我们来推导决定最优观测时间间隔的公式。

用 $t$ 代替 $x$ ，并把(7)、(8)代入(6)式，仍取 $B=2e_{\max}$ ，则我们有

$$\Delta t = \frac{1}{\Omega} \sqrt[3]{6 \frac{e_{\max}}{A}} \quad (18)$$

但是，由于 $\Omega$ 一般和 $l, m, n$ ，等有关，在它们之间的关系式没有给出以前，我们还不能决定 $\Delta t$ 。

考虑如下两种情形：

### 1. 过滤模式

如采用线性化的涡度方程和热力学方程，

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = f_0 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{\partial \psi}{\partial p} = -\frac{\sigma}{f_0} \omega \quad (20)$$

则从上两式消去 $\omega$ 后我们得到方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2}\right) \psi + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

其中  $\psi$  是流函数, 设  $\psi = \phi/f_0$ ,  $\phi$  是等压面位势高度,  $f_0$  是给定的某一纬度的地转参数;  $\omega = dp/dt$ ;  $\sigma = -\partial \ln \theta / \rho \partial p$ ,  $\rho$  是空气密度,  $\theta$  是位温, 这里假定  $\sigma$  是常数,  $U$  是基本西风的速率, 也是常数。

如用  $\psi$  代替  $\hat{f}$  并设上方程有形式(7)的解, 则

$$\Omega = iU - \frac{\beta l}{l^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} n^2} \quad (22)$$

上式表示 Rossby 波的频率。一般说来, 在中高纬度地区, 在上式右端第二项中  $l^2 \gg f_0^2 n^2 / \sigma$ , 故由上式所决定的  $\Omega$  和正压的情形相近。利用上式, 如设  $U = 15$  米/秒,  $f_0 = 10^{-4}$  秒<sup>-1</sup>,  $\beta = 1.6 \times 10^{-11}$  米<sup>-1</sup>秒<sup>-1</sup>,  $\sigma = 3 \times 10^{-2}$  米<sup>2</sup>/秒<sup>2</sup>毫巴<sup>2</sup>, 对于不同的水平波长和垂直波长, 从公式(18), 我们可以求得最优的观测时间间隔。其结果如表 1 所示。可以看出, 这些结果和世界气象组织对全球观测系统的要求相近。

表 1 在过滤模式大气中, 最优观测时间间隔 (小时)

| $(L_p)_{opt}$<br>(毫巴) | $L_{min}$<br>(千米) | $10^3$ | $2 \times 10^3$ | $3 \times 10^3$ |
|-----------------------|-------------------|--------|-----------------|-----------------|
| 500                   |                   | 2.51   | 5.07            | 7.60            |
| 1000                  |                   | 2.54   | 5.21            | 7.94            |

## 2. 原始方程模式

对于正压大气, 按文献[4], 我们有

$$\Omega_e = iU + \mu_e \sqrt{gHl^2 + f_0^2} \quad (23)$$

其中  $e = 1, 2, 3$ ;  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  依次等于  $0, 1, -1$ ;  $H$  是流体自由面平均高度。

当  $\mu_e \approx 0$  时, 上式表示的是重力惯性外波的频率。因根号内  $gHl^2$  比  $f_0^2$  大一个量级以上, 对于  $\mu_2 = 1$  的情形, 我们可以很精确地用

$$\Omega \approx (U + c)l \quad (23)'$$

代替(23)式。这里  $c = \sqrt{gH}$ 。设  $g = 10$  米/秒<sup>2</sup>,  $H = 9 \times 10^3$  米, 则利用上式算得的  $\Omega$  值和(18)式, 我们可以求得  $\Delta t$  的值。其结果如表 2 所示。

表 2 在重力惯性外波情形, 最优的观测时间间隔 (小时)

| $L_{min}$ (千米)        | $10^3$ | $2 \times 10^3$ | $3 \times 10^3$ |
|-----------------------|--------|-----------------|-----------------|
| $\Delta \hat{t}$ (小时) | 0.12   | 0.24            | 0.35            |

对于斜压大气, 如取如下线性化方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f_0 v = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f_0 u = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p} + \sigma \omega = 0 \quad (26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (27)$$

则消去  $u, v, \phi$  后, 我们可以得到如下方程

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} + f_0^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial p^2} + \sigma \nabla^2 \omega = 0 \quad (28)$$

如用  $\omega$  代替  $\hat{f}$  并设上方程的解有如(7)的形式, 则可以有频率方程

$$\Omega^2 = f_0^2 + \frac{\sigma}{n^2} (l^2 + m^2) \quad (29)$$

上式表示重力惯性内波。如  $f_0$  和  $\sigma$  的值仍和前面所取的一样, 而  $\varepsilon_{\text{max}}/A = 1/10, l = m$ , 则利用上式, 从(18)式我们可以求得各不同水平波长和垂直波长下的最优的观测时间间隔的值。其结果如表 3 所示。

表 3 在原始方程模式大气中, 最优的观测时间间隔(小时)

| $\Delta t$ (小时)           | $L_{\text{min}}$ (千米) | $10^3$ | $2 \times 10^3$ | $3 \times 10^3$ |
|---------------------------|-----------------------|--------|-----------------|-----------------|
| $(L_p)_{\text{min}}$ (毫巴) |                       |        |                 |                 |
| 500                       |                       | 1.48   | 1.99            | 2.17            |
| 1000                      |                       | 0.88   | 1.48            | 1.89            |

比较表 1 和表 2、表 3 可以看出, 在过滤模式大气中, 最优的观测时间间隔普遍比在原始方程模式大气中的为大, 特别是比在重力惯性外波的情形为大。显然, 这是由于慢波和快波移速不同造成的结果。这和根据计算稳定性理论得到的, 在一定空间格网距下, 这两种模式的时间步长的差别, 是类似的。

如果我们再把这三个表中的结果和国际约定的观测时间间隔相比较, 则只有表 1 中的结果与之相近。在以  $10^3$  千米为最短波长的情形(如大尺度短期天气预报), 对于 Rossby 波, 取  $\Delta t = 3$  小时, 看来是合理的。但是, 对于以  $2 \times 10^3$  千米为最短波长的情形(如大尺度中期预报或全球预报), 则可以取  $\Delta t = 6$  小时。

## 五、以地面为基础的观测系统

如果把第三节和表 1 中的结果作为对以地面为基础的观测系统的要求, 我们可以得到表 4。表中的要求比世界气象组织 1980 年出版的《全球观测系统手册》中规定的高, 要在全球范围内实现须要作长时间的努力, 特别需要大规模的, 密切的国际协作。

但是, 如考虑重力惯性波, 使观测系统适应, 则还有巨大的困难须待克服。看来, 由于经济等原因, 在最近相当一个时期还不可能实现。不过, 这对于目前一般数值天气预报模式只需要一个时刻的初值的情形没有影响, 只有对那些在初始条件中考虑了时间微商, 或

表 4 对以地面为基础的观测系统的要求

| 观 测 系 统     | 全 球         | 区 域    | 国 家    |
|-------------|-------------|--------|--------|
| 相邻测站间距离(千米) | 300         | 300    | 150    |
| 层 次         | 平流层 6 对流层 9 | 和全球的相同 | 和全球的相同 |
| 观测时间间隔(小时)  | 6           | 6      | 3      |

引用几个时刻的初值的模式,以及一些研究工作才有影响。如果要考虑这些影响,则必须建立包括既有以地面为基础的观测系统(包括常规观测系统),也包括有以空间为基础的有效的混合观测系统(主要是卫星观测系统);同时,还要大力提高这两个系统的观测精度、空间分辨率和观测频率。当然,要建立一个合理,经济且最优的,有效的混合观测系统,还需要进行很多研究、试验和分析比较的工作。

## 参 考 文 献

- [1] Alaka, M. A., Theoretical and practical consideration for network design, *Meteorological Observations and Instrumentation*, 21—27, AMS 1970.
- [2] Gandin, L. S., The Planning of meteorological station networks, Technical Note, 111, WMO 1970.
- [3] Liao Dongxian et al., Requirements of observational data for numerical weather prediction, *Papers Presented at the Asia and South west Pacific Technical Conference on Operational Weather Forecasting Including Interpretation of Numerical Weather Prediction*, 155—164, WMO 1983.
- [4] Morel, P. et al., *Dynamic Meteorology*, 469—512, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland 1973.

## DETERMINATION OF THE DISTANCE BETWEEN TWO NEIGHBORING STATIONS, THE VERTICAL INCREMENT AND THE OBSERVATIONAL TIME INTERVAL IN OPTIMUM SENSE

Liao Dongxian

(State Meteorological Administration)

### Abstract

In consideration of the observational error, the truncation error and the requirements of numerical weather prediction, three formulas for determining the distance between two neighboring stations  $\hat{d}$ , the vertical increment  $\Delta \hat{p}$  and the observational time interval  $\Delta \hat{t}$  in optimum sense, have been derived. Since they depend on the shortest wave length taken into account and the ratio of the maximum observational error to the corresponding wave amplitude, the results obtained are quite different for different scale systems.



For the filtered model, the values of  $\hat{d}$ , of  $\Delta\hat{p}$  and of  $\Delta\hat{t}$ , in general, come near those required in the MANUAL ON THE GLOBAL OBSERVING SYSTEM published in 1980 by WMO. However, the values of  $\Delta\hat{t}$  required by the model are much greater than those required by the primitive equation model.

Therefore, it is improper to study the fast moving processes of the atmospheric motion on the basis of the current conventional observations only. It is necessary to establish an optimum composite system which includes the surface-based and the space-based observational system.