

移动性涡源与 Rossby 波*

徐银梓 伍荣生

(南京大学气象系)

提 要

本文利用简单的一维正压涡度方程来分析与讨论涡源的强度变化及位置变化对于 Rossby 波的影响, 得出了一些有兴趣的结果。

一、引 言

早在四十年代, Rossby、叶笃正等人^[1,2]对于正压无辐散大气中的波动性质,作了深入的分析。叶笃正还指出,在固定地点以定常的速率注入涡度,则在涡源的下游将有新波产生,并对这种上游效应作了深入的讨论。这种物理过程可以比拟于西风带中,由于地形的作用产生了固定的涡源,而使地形下游有波槽的建立。这是大气中常见的一种过程。

但是,在实际大气中,还可能出现较复杂的过程。因此,在本文中,我们将[2]中的处理作了推广,即认为涡源不仅是可移动的,而且其强度也是可变的。在这种更为一般的条件下来讨论解的性质,使我们对大气的动力学性质有了进一步的理解。

为了使问题的处理简单起见,我们仍假设运动是一维的,这与真实大气过程是有较大出入的,但这不仅可使数学问题易于求解,同时又易于给出大气运动的一种近似的定性的特征图象,这对于深入了解真实过程是有帮助的。

二、基本方程及相应的初边值条件

考虑最简单的一维正压无辐散涡度方程

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t \partial x} + \bar{u} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta v = 0 \quad (1)$$

这就是[1,2]中所使用的基本方程。其中 v 为南北方向的风速分量, \bar{u} 为基本气流, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$, f 为柯氏参数,其余符号同惯常意义。

对于用(1)式描述的模式大气,如果外加一个移动性涡源,且其强度是可变的,则与(1)式相应的初边值条件为

$$t=0, v=0;$$

* 本文于1981年3月30日收到,1984年1月4日收到最后一次修改稿。

$$t > 0, x = at + b,$$

$$v = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = \xi_0 e^{i\omega t}. \tag{2}$$

其中, a 为涡源的移速, b 为初始位置, 不失一般性, 可以取 b 等于零。 $\frac{\partial v}{\partial x}$ 表示涡源的强度。从(2)式可知, 涡源的强度是在作周期变化的。在(1)、(2)式中的 $\bar{u}, \beta, a, \omega, \xi_0$ 均为常数。如果在(2)式中, 取 $a=0, \omega=0$, 则(2)式就化为叶笃正所曾研究过的例子, 即定常涡度的注入问题。

下面讨论(1)式在(2)式条件下的求解问题。

作变换

$$\xi = x - \bar{u}t$$

$$\eta = t \tag{3}$$

则(1)式化为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} + \beta v = 0 \tag{4}$$

再令

$$\bar{u} - a = U \tag{5}$$

则(2)式可化为

$$\eta = 0, v = 0;$$

$$\eta > 0, \xi = -U\eta;$$

$$v = 0, \frac{\partial v}{\partial \xi} = \xi_0 e^{i\omega\eta} \tag{6}$$

于是, 相应于(1)、(2)两式所决定的物理问题便归结为(4)式在(6)式条件下的求解问题。这个问题可以利用黎曼方法^[6]来求解。

根据黎曼方法的基本原理可以知道。(4)式的特征曲线为坐标线, 即 $\xi = \text{常数}, \eta = \text{常数}$ 的一组曲线。如果 $U \neq 0$, 则初“边”值曲线由 $\eta = 0$ (水平的特征曲线) 及 $\xi = -U\eta$ (通过原点的斜线) 所组成。欲解在由此斜线 (非特征曲线) 和水平的特征曲线所夹成的“钝角域” (即图一、图二中的阴影部分) 中是适定的, 则在此斜线上应该给出函数值及一阶导数值, 而在与特征曲线相一致的初值曲线上, 只能给出函数值。对于这种问题的提法的适定

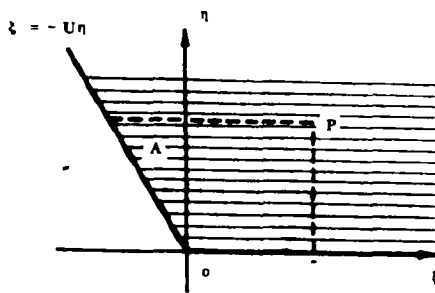


图 1 $U > 0$ 时解的存在区域

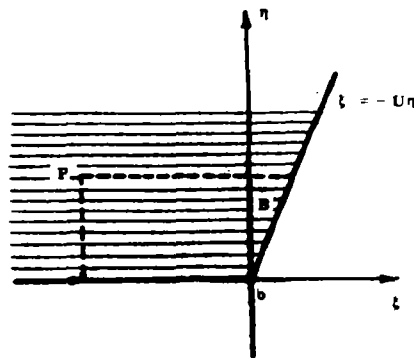


图 2 $U < 0$ 时解的存在区域

性,见附录。所以,对于 $U \neq 0$ 的情况,(4)式与(6)式是适定的。根据 $U > 0$ 和 $U < 0$ 的两种情况,解的存在区域分别如图 1, 2 中的阴影部分所示:

三、 $U > 0$ 时的解及其特点

当 $U > 0$ 时,依定义可知 $\bar{u} > a$ 。在西风带中,由于 $\bar{u} > 0$,所以此时涡源总是较基本气流东移为慢,或者可以是向西移动的,也可以是静止不动的。而在东风带中,对于 $\bar{u} < 0$,必须 $a < 0$,且 $|a| > |\bar{u}|$,也就是说,涡源是向西移动的,而且较基本气流(东风)移动为快。事实上, $U > 0$ 这种情况相当于,相对于涡源来说,基本气流是向东的,即讨论属于向东的相对基本气流中的波动的动力学特征。

用黎曼方法较为容易地求出(4)、(6)两式的解 $v(\xi, \eta)$ 后,为了讨论方便起见,进一步我们将此解改用跟随涡源的坐标系 (X, T)

$$\begin{aligned} X = \xi + U\eta & \quad X = x - at \\ T = \eta & \quad \text{即} \quad T = t \end{aligned} \quad (7)$$

来表达,并记为 $v(X, T)$ 。为了避免复杂的积分计算,我们考虑 $-U\eta < \xi < 0$ (图 1 中的“锐角域”A)即 $0 < X \leq UT$ 的情形。于是,我们得到解的表达式为:

$$v(X, T) = \xi_0 \sqrt{\frac{U}{4\beta}} e^{-i\frac{\omega}{2U}(x-2UT)} \int_{-z}^z J_0(\sqrt{Z^2 - a^2}) e^{-i\omega_0 a} da \quad (8)$$

$$(0 < X \leq UT)$$

其中 J_0 为零阶 Bessel 函数,

$$Z = \sqrt{\frac{\beta}{U}} X, \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{4\beta U}} \quad (9)$$

对于(8)式,含有零阶 Bessel 函数的积分一般是不易求得明显的表示式的。但在某些特殊情形下,它可以用简单函数来表示。

(i) $\omega = 0$

此时,涡源只有移动而无强度变化,因此(8)式可以化为

$$v(X, T) = \xi_0 \sqrt{\frac{U}{\beta}} \sin \sqrt{\frac{\beta}{U}} X \quad (10)$$

$$(0 < X \leq UT)$$

由此可见,在移动性涡源的影响下,在涡源的下游形成了定常的槽脊,这种槽脊的波长为

$L_{s0} = 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}}$, 与 $U^{\frac{1}{2}}$ 成正比,即基本气流相对于涡源移动得越快,波长越长。从(10)

式也可以见到 U 大,振幅亦大。从此可见到,涡源的移动速度大小对于定常槽脊的形成与特点是有着重要影响的。

当涡源静止时, $a = 0$, $X = x$, $U = \bar{u}$, (10)式就化为叶笃正所得到的结果。

$$(ii) \quad \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{4\beta U}} = 1$$

如果涡源的强度变化具有这种特点,则(8)式可化为:

$$v(X, T) = \xi_0 \sqrt{\frac{U}{2\beta}} e^{i\sqrt{\frac{\beta}{U}}(X-2UT)} \sin \sqrt{\frac{2\beta}{U}} X \quad (11)$$

$$(0 < X \leq UT)$$

将此式与(10)式相比较,就可以见到由于涡源强度的变化引起了解的变化。例如,在跟随涡源的坐标中,亦出现了定常的波动,但是其波长为

$$L_s = 2\pi \sqrt{\frac{U}{2\beta}} = 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} L_{s0} \quad (12)$$

即较前一情况的波长略小些。然而此时,这种波动的振幅不再维持为常数,而是呈波动形式,其波长为

$$L_a = 2\pi \sqrt{\frac{U}{\beta}} \quad (13)$$

相当于 Rossby 静止波波长的尺寸,而其移速为 $2U$ 。这一性质是在定常涡源条件下,所未曾注意到的。

若取 $\beta = 1.0 \times 10^{-11} \text{米}^{-1} \text{秒}^{-1}$, $U = 10 \text{米秒}^{-1}$, 则此时涡源的强度变化周期约为三天左右,这种 $\omega_0 = 1$ 的情形在大气中是否存在,有待于进一步的探测。

(iii) 一般的 ω 值

此时可利用定常相法求得其近似解。

令

$$I = \int_{-z}^z J_0(\sqrt{Z^2 - \alpha^2}) e^{-i\omega_0 \alpha} d\alpha \quad (14)$$

由于

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ix \sin \xi} d\xi \quad (15)$$

将此关系式代入(14)式,得到

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\xi \int_{-z}^z e^{-i\alpha h(\alpha)} d\alpha \quad (16)$$

其中

$$h(\alpha) = \sqrt{Z^2 - \alpha^2} \sin \xi + \omega_0 \alpha \quad (17)$$

利用定常相法,求得近似式为:

$$I \approx \sqrt{\frac{Z}{2\pi}} \left[\int_0^{\pi} e^{g_1(\xi)} d\xi + \int_0^{\pi} e^{g_2(\xi)} d\xi \right] \quad (18)$$

其中

$$g_1(\xi) = \ln \sin \xi - \frac{3}{4} \ln(\omega_0^2 + \sin^2 \xi) \pm i \left(Z \sqrt{\omega_0^2 + 1} - \frac{\pi}{4} \right) \quad (19)$$

但是(18)式还不是很直观的,所以再次利用定常相法,最后可以近似地得到解为,

$$v(X, T) \approx 2 U \xi_0 \sqrt{\frac{X^2}{(\omega^2 + 4 \beta U) \left[\left(\frac{\omega^2}{2 \beta} - U \right)^2 + X^2 (\omega^2 + 4 \beta U) \right]}} \times e^{-i \frac{\omega}{2U} (X - 2UT)} \sin \left[\frac{\sqrt{\omega^2 + 4 \beta U}}{2U} \left(X - \frac{\pi}{4} + \lambda \right) \right] \quad (20)$$

其中

$$\lambda = \operatorname{tg}^{-1} \sqrt{\frac{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Z^2 (\omega_0^2 + 1)} + \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + Z^2 (\omega_0^2 + 1)} - \left(\omega_0^2 - \frac{1}{2}\right)}} \quad (21)$$

这时,解具有与(ii)所述的相似的特点。

在(20)中如令 $\omega \approx 0$, 则在 X 很大处, 可得 $\lambda \approx \frac{\pi}{4}$, 且有

$$v \approx \xi_0 \sqrt{\frac{U}{\beta}} \sin \sqrt{\frac{\beta}{U}} X \quad (22)$$

(0 < X ≤ UT)

此式与(10)式相同。又在(20)式中令 $\omega = \sqrt{4 \beta U}$, 则在 X 很大处, 可得 $\lambda \approx \frac{\pi}{4}$, 且有

$$v \approx \xi_0 \sqrt{\frac{U}{2 \beta}} e^{-i \sqrt{\frac{\beta}{U}} (X - 2UT)} \sin \sqrt{\frac{2 \beta}{U}} X \quad (23)$$

(0 < X ≤ UT)

此式与(11)式相同。由此可见,近似解(20)(21)式是合适的。

四、 $U < 0$ 时的解及其特点

当 $U < 0$ 时,依定义可知 $\bar{u} < a$ 。在西风带中, $\bar{u} > 0$, 从此可知必须 $a > 0$, 且要比 \bar{u} 为大。即涡源必须是快速地向东移动的。在东风带中, 须 $a \geq 0$, 或者 $a < 0$ 而其绝对值小于 $|\bar{u}|$, 即涡源是向东的或静止的, 或者较基本气流缓慢地向西移动。总之,相对于涡源来说,基本气流是向西的。

为了避免复杂的积分计算,我们考虑 $-U\eta > \xi > 0$ (图2中的“锐角域”B) 即 $UT \leq X < 0$ 的情形。按黎曼方法可求得解为

$$v(X, T) = \xi_0 \sqrt{\frac{|U|}{4 \beta}} e^{-i \frac{\omega}{2U} (X - 2UT)} \int_{-Z}^Z I_0(\sqrt{Z^2 - a^2}) e^{-i \omega a} da \quad (24)$$

(UT ≤ X < 0)

其中

$$z = \sqrt{\frac{\beta}{|U|}} X, \quad \omega_0 = \frac{\omega}{\sqrt{4\beta|U|}} \quad (25)$$

I_0 为虚变元的 Bessel 函数, 它随变元的增大而无限增大。当 $\omega \neq 0$ 时, 它将使 (24) 式中的积分值随着 X 而作单调增大的变化。于是, (24) 式所表示的是振幅单调增大的波动解, 这是无意义的, 因为它不合物理意义, 且也与原来线性化假定不相符合。当 $\omega = 0$ 时, (24) 化为

$$v(X, T) = \xi_0 \sqrt{\frac{|U|}{\beta}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\beta}{|U|}} X \quad (26)$$

v 将随着 X 的增大而无限增大, 这更可直观地看出解是无意义的。

由此可见, 在 $U < 0$ 时, 不出现有实际意义的波动类型的解。Kasahara 对此曾有过非常简单的分析与讨论。他利用定常的涡度方程来求分析解, 指出在东风带中, 只要扰动宽度符合一定条件, 就不可能出现波动解, 而数值试验 [3]、[4] 也证实了这一点。我们从另一角度利用非定常的简单的涡度方程的解析解也得到了相似的结论。

五、小 结

利用正压无辐散的一维涡度方程, 我们分析了移动性涡源对于 Rossby 波的影响, 得出了一些有兴趣的结果。我们证明了在相对于涡源来说是向西的基本气流即 $U < 0$ 的情况下, 将不出现有实际意义的波动解, 这一点与数值试验和模型试验的结果是较一致的。而另一方面, 在 $U > 0$ 的情况下, 由于涡源强度的变化, 使得定常的波动还有一个振幅的强度的变化, 这些结果是未曾予以注意的。这些结果当然还是很初步的, 如果将它扩展到二维或者高维的情况, 也是进一步了解大气动力性质的一个值得探讨的问题。

附 录

对双曲型方程而言, 若 (1) 定解曲线由一条严格单调的非特征曲线 \widehat{AB} 和一条特征线 \overline{BC} 组成, 且它们在相交处夹成“钝角”¹⁾; (2) 在 \widehat{AB} 上给定函数值及一阶导数值, 在 \overline{BC} 上给定函数值。则此定解问题在由 \widehat{AB} 和 \overline{BC} 所夹成的“钝角域” G 中是适定的。

如图所示, \widehat{AB} 为非特征线, \overline{BC} 为特征线, 过 B 点作特征线 \overline{BD} , 则在“锐角域” ABD 中, 我们的问题为:

$$L[u] = u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f$$

在 \widehat{AB} 上, $u = \varphi(x, y)$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \psi(x, y)$$

此为柯西问题, 是适定的。于是, 用黎曼方法可求得 \overline{BD} 上的 u 值, 即在 \overline{BD} 上, $u = \varphi_2$

1) 若非特征线和特征线在相交处夹成“锐角”, 且在非特征线和特征线上只给定函数值, 则在“锐角域”中定解问题是适定的。详见“数学物理方程”吴新谋著, 第二册, 第十四页。

(x, y) 。

在区域 DBC 中, 我们的问题是:

$$L[u] = f$$

在 \overline{BC} 上, $u = \phi_1(x, y)$

在 \overline{BD} 上, $u = \phi_2(x, y)$

此为特征问题, 是适定的。于是, 由区域 ABD 和 DBC 组成的区域 ABC 即区域 G 中, 我们的问题便是适定的了。

我们可完全类似于用黎曼方法求柯西问题解的步骤来求得区域 DBC 中的解, 只是稍许复杂一点而已。其要点是应用平面格林公式于区域 $ABCPA$, 从而把方程的解在 P 点之值用非特征线 \widehat{AB} 上的函数值和一阶导数值及特征线段 \overline{BC} 上的函数值表示出来, 得到公式如下:

$$\begin{aligned} u(P) = & u(A)R(A; x_0, y_0) + u(c)R(c; x_0, y_0) \\ & - u(B)R(B; x_0, y_0) + \int_{cB} u(R_x - bR)dx \\ & + \int_{\widehat{AB}} [R(u_x + bu)dx + u(R_y - aR)dy] \\ & + \iint_G Rf dx dy \end{aligned}$$

其中 $R(x, y; x_0, y_0)$ 为黎曼函数。

参 考 文 献

- [1] Rossby, C. G., On the propagation of frequencies and energies in certain types of oceanic and atmospheric waves, *J. Met.*, **2**, 187—204, 1945.
- [2] Yet, T. C., On the energy dispersion in the atmosphere, *J. Met.*, **6**, 1—6, 1949.
- [3] Kasahara, A., The dynamical influence of orography on the large scale motion of the atmosphere, *J. A. S.* **23**, 259—271, 1966.
- [4] Fisher, G., On the generation of quasi-geostrophic waves by mountains: Numerical experiments with a barotropic model, Proc. WMO/IUGG Symp. N. W. P. Tokyo, 1968.
- [5] Courant, R., and D. Hilbert, *Methods of mathematical physics*, Vol. 2, Interscience Publ. 1962.

MOVABLE VORTICITY SOURCE AND ROSSBY WAVE

Xu Yinzi and Wu Rongsheng

(Meteorology Department, Nanjing University)

Abstract

A simplified one dimension barotropic vorticity equation is used to study the influences of vorticity source on Rossby wave. Some interesting results are obtained.

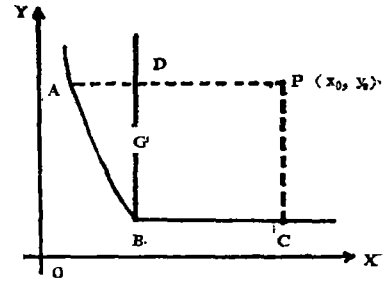


图 A1 解的存在区域——“钝角域” G