

非矩形网格上的车贝雪夫展开*

李 黄 刘桂芝

(黑龙江省气象科学研究所)

周家斌

(中国科学院大气物理研究所)

提 要

本文指出,在任意不规则的非矩形二维网格上,若采用两步展开的做法,即首先逐行展开,再按列展开就可以对在该网格上给定的函数实现二维车贝雪夫多项式展开。这一推广在实用上有很大的意义。

一、引 言

用车贝雪夫正交多项式定量表示气象要素场,有许多优点。但是以往关于车贝雪夫多项式应用的研究都只限于等距格点,因而受到许多限制。周家斌^[1]将车贝雪夫多项式展开推广到不规则格点上。他用非线性变换的方法以格点的二维序号代替原始变量,从而在序号空间里满足了等距格点的要求,实现了对该区域上函数的展开。这样就可以直接处理不规则分布的气象台站资料,因此得到更广泛的应用。

但是,上述工作对于不规则格点的分布和数目仍然有所限制,要求在序号空间里格点分布必须排成 $I_0 \times J_0$ 的矩阵形状即成为矩形网格。一般情况下,只要适当排列格点序号,调整格点的数目,并不难满足这一要求。在有些情况下,由于受到地形、海岸线、行政区划、资料来源以及分析要求等限制,格点的数目及序号命名不便作任意调整,要满足序号空间里等距矩形网格的要求就感到困难。例如黑龙江省台站分布接近一个三角形,要反映全省要素场分布特征,把格点排成三角形较为适宜。为了在这种非矩形网格上实现车贝雪夫多项式展开,李黄和刘桂芝^[2]采用了对称延拓的方法,将三角形网格变换成矩形网格,从而能够直接利用通常的等距矩形格点上的公式进行计算。

那末,对于更为一般的任意不规则的非矩形网格上的函数能否作车贝雪夫多项式展开呢?本文的目的就在于提出和讨论这一问题。

二、非矩形网格上的车贝雪夫展开

为简捷计,首先讨论二维情况。任何一种不规则网格,通过文献[1]给出的非线性变换方法,以格点二维序号代替格点原始变量,都可以变换成等距网格。所以下面的讨论都

* 本文于1983年6月1日收到,1983年11月30日收到修改稿。

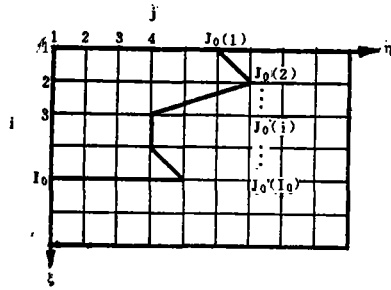


图 1 序号空间里任意网格分布示意图

是在序号空间里对等距格点进行的。

序号空间里任意格点分布可以表示为：

$$(i, j) \begin{cases} i=1, 2, \dots, I_0 \\ j=1, 2, \dots, J_0(i) \end{cases}$$

其示意图见图 1。即共有 I_0 行，对于不同的行 (i)，其列数 J_0 可以不同，亦即： $J_0 = J_0(i)$ 。

车贝雪夫多项式的具体形式取决于展开区间上格点的总数，而其正交性也只有在整个展开区间上才能成立。因此在上述序号空间中，如果我们在列变化的方向 (η 方向) 上，逐行 (i) 按其不同的格点数 $J_0(i)$ 采用相应的车贝雪夫多项式作展开，而在行变化的方向 (ξ 方向) 上，仍按同一格点数 I_0 采用车贝雪夫多项式，就可以对在该非矩形区域上给定的函数作车贝雪夫多项式展开。下面我们就来导出有关的公式。

1. 系数公式

对于在非矩形等距网格上给定的函数 $Z(i, j)$ 可以引进下列展开公式：

$$\tilde{Z}(i, j) = \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} A_{ks} \Phi_k(i) \Psi_s(i, j) \quad (1)$$

$$(i=1, 2, \dots, I_0; j=1, 2, \dots, J_0(i))$$

式中 $\tilde{Z}(i, j)$ 为格点 (i, j) 处 $Z(i, j)$ 的拟合值， $\Phi_k(i)$ 为 ξ 方向的 k 阶规一化车贝雪夫多项式在格点 i 的值，其格点数为常数 I_0 。 $\Psi_s(i, j)$ 为 η 方向的 s 阶规一化车贝雪夫多项式在格点 (i, j) 的值，对于不同的 i 行可以有不同的格点数 $J_0(i)$ ， Ψ_s 也就可以有不同的具体形式。其他符号的意义为： K_0 为 ξ 方向截止阶数， S_0 为 η 方向截止阶数， A_{ks} 为二维车贝雪夫系数。

应用最小二乘法原理和 $\Phi_k(i)$ 、 $\Psi_s(i, j)$ 在各自区间上的正交规一性，很容易导出系数 A_{ks} 的计算公式。推导过程如下：

第一步：首先对 $Z(i, j)$ 逐行 ($i=1, 2, \dots, I_0$) 分别沿 η 方向作展开。对每一行来说都只是一个一维车贝雪夫多项式展开问题。由文献[1]可知，根据最小二乘法和 $\Psi_s(i, j)$ 在区间 $j=1, 2, \dots, J_0(i)$ 上的正交规一性，其展开公式和系数公式分别为：

$$\begin{cases} \hat{Z}(i, j) = \sum_{s=0}^{S_0} B_s(i) \Psi_s(i, j) \\ B_s(i) = \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z(i, j) \Psi_s(i, j) \end{cases} \quad (2)$$

$$\quad (3)$$

其中 $i=1, 2, \dots, I_0$ ， $j=1, 2, \dots, J_0(i)$ ， $s=0, 1, \dots, S_0$ ，截止阶数 $S_0 \leq J_0(i) - 1$ 。对于每一个 i 行来说，都可得到一组车贝雪夫系数 $B_s(i)$ 。

第二步：再对系数 $B_s(i)$ 逐阶 ($s=0, 1, \dots, S_0$) 分别沿 ξ 方向作展开。对于每一阶 s 来说，又只是一个一维车贝雪夫展开问题。同样可以得到展开公式和系数公式分别为：

$$\begin{cases} \hat{B}_s(i) = \sum_{k=0}^{K_0} A_{ks} \Phi_k(i) \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} A_{ks} = \sum_{i=1}^{I_0} B_s(i) \Phi_k(i) \end{cases} \quad (5)$$

其中 $i=1, 2, \dots, I_0; s=0, 1, \dots, S_0; k=0, 1, \dots, K_0$; 截止阶数 $K_0 \leq I_0 - 1$ 。

用(4)式中的 $\hat{B}_s(i)$ 代替(2)式中的 $B_s(i)$, 即得到二维展开公式

$$\tilde{Z}(i, j) = \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} A_{ks} \Phi_k(i) \Psi_s(i, j) \quad (1^*)$$

将(3)式代入(5)式, 则得:

$$A_{ks} = \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z(i, j) \Phi_k(i) \Psi_s(i, j) \quad (6)$$

这就是所要求的二维车贝雪夫系数公式。

根据推导过程, 展开阶数的范围应为:

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq J_0(i) - 1 \\ 0 \leq k \leq I_0 - 1 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} S_0 \leq J_0(i) - 1 \\ K_0 \leq I_0 - 1 \end{cases} \quad (7)$$

值得注意的是 s 的变化范围, 即截止阶数 S_0 随行数 i 可以不同。但是 A_{ks} 是表示整个区域上的特征, 其阶数 k 和 s 应该有统一的变化范围, 即应有统一的截止阶数, 那末如何确定呢?

很明显, 对于某一阶 s 来说, 若有一行 $i=i_i$, 其格点数为 $J_0(i_i)$, 且 $J_0(i_i) - 1 < s$, 那末对于此行, 该 s 阶车贝雪夫多项式 $\Psi_s(i, j)$ 是不存在的, 相应的第一步展开系数 $B_s(i_i)$ 也是不存在的。当然也不需要它们。因为作一维展开时, 完全拟合所需的最高阶数为 $J_0(i_i) - 1$ 。

但是第二步展开时, 要求每一阶 s , 在所有的行 ($i=1, 2, \dots, I_0$) 上, $B_s(i)$ 都有确定值。为此须在第一步展开时, 取

$$s \leq \min [J_0(i) - 1] \quad (8)$$

这个条件太苛刻了, 它将使截止阶数过于偏小而大大影响拟合精度。

既然在第一步展开时, 阶数 s 高于 $J_0(i) - 1$ 的多项式不起作用, 自然可以假定其对应的展开系数 B_s 为零。因此我们引入假定如下:

若对任意 $i=i_i$ 有 $J_0(i_i) \leq s \leq \max [J_0(i) - 1]$

则令 $B_s(i_i) \equiv 0$ (9)

这样对于所有的 $B_s(i)$ ($0 \leq s \leq \max [J_0(i) - 1]$, $i=1, 2, \dots, I_0$) 都可以有确定值存在, 从而保证了第二步展开得以实现, (4)、(5)两式能够成立。而且(5)式可以改写如下:

$$\begin{aligned} A_{ks} &= \sum_{i=1}^{I_0} B_s(i) \Phi_k(i) \\ &= \sum_{i=1}^{I_0} B_s(i) \Phi_k(i) + \sum_{i=i_i}^{I_0} B_s(i_i) \Phi_k(i_i) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{I_0} B_s(i) \Phi_k(i) \quad (10)$$

再将(3)式代入(10)式,则得

$$A_{ks} = \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z(i, j) \Phi_k(i) \Psi_s(i, j) \quad (11)$$

其中 i_i 满足(9)式,即 $J_0(i_i) \leq s \leq \max_i [J_0(i) - 1]$ 。

二维车贝雪夫系数公式(11)式清楚地表明 $J_0(i) \leq s$ 的那些 i_i 行对 A_{ks} 没有贡献。系数 A_{ks} 描述的是 $J_0(i) > s$ 的那些 i 行的分布特征。

在(9)式假定下,系数公式(11)的展开阶数范围就放宽为:

$$\begin{cases} 0 \leq s \leq \max_i [J_0(i) - 1] \\ 0 \leq k \leq I_0 - 1 \end{cases} \quad (12)$$

从上述推导过程可知,引入(9)式假定是系数公式成立的必要条件。在实际计算中,我们可以进一步假定:对任意 $i = i_i$ 若满足

$$J_0(i_i) \leq s \leq \max_i [J_0(i) - 1] \text{ 时, 令 } \Psi_s(i_i, j) \equiv 0 \quad (13)$$

这个假定比(9)式假定要强,它在公式推导中并不必要,但是引入它可以进一步统一公式,便于计算。由(3)式和(9)式可知:

$$B_s(i) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z(i, j) \Psi_s(i, j) & 0 \leq s \leq J_0(i) - 1 \\ 0 & J_0(i) \leq s \leq \max_i [J_0(i) - 1] \end{cases}$$

在(13)式假定下,则放宽了(3)式成立的范围,并可由(3)式导出(9)式,从而合并为一个公式:

$$B_s(i) = \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z(i, j) \Psi_s(i, j) \quad 0 \leq s \leq \max_i [J_0(i) - 1] \quad (14)$$

同时也保证了展开公式(1)和系数公式(6)在(12)式给出的范围上能够成立,这样系数公式(6)式与(11)式就完全等价了。

2. 误差公式

展开误差可以用方差表示,其表达式为:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{J_0(i)} [Z(i, j) - \tilde{Z}(i, j)]^2 \\ = \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{J_0(i)} \left[Z(i, j) - \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} A_{ks} \Phi_k(i) \Psi_s(i, j) \right]^2 \end{aligned} \quad (15)$$

将系数公式(6)式代入(15)式,并利用两步展开法,根据 $\Phi_k(i)$, $\Psi_s(i, j)$ 的正交规一性和(13)式假定,可以证明最小方差为:

$$\sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} \sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z^2(i, j) - \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} A_{ks}^2 \quad (16)$$

证明过程从略。

另外几个衡量拟合程度及误差的公式为:

$$\text{相关指数: } R = \frac{\sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} A_{ks}^2}{\sqrt{\left[\sum_{i=1}^{I_0} \sum_{j=1}^{J_0(i)} Z^2(i, j) \right]}} \quad (17)$$

$$\text{均方差: } \sigma_{K_0, S_0} = \sqrt{\frac{\sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} \min A_{ks}^2}{\left[\sum_{i=1}^{I_0} J_0(i) - 1 \right]}} \quad (18)$$

$$\text{相对误差: } \rho_{K_0, S_0} = \sqrt{1 - R} \quad (19)$$

三、若干问题的讨论

1. 截止阶数

由系数公式的推导可知, 截止阶数本应取为:

$$\begin{cases} K_0 \leq I_0 - 1 \\ S_0 \leq \min_i [J_0(i) - 1] \end{cases} \quad (20)$$

在引入(9)式假定之后, 截止阶数就放宽为:

$$\begin{cases} K_0 \leq I_0 - 1 \\ S_0 \leq \max_i [J_0(i) - 1] \end{cases} \quad (21)$$

这样在整个区域上也就取到统一的截止阶数。

2. 收敛性

利用一维车贝雪夫多项式展开的收敛性和两步展开法的推导可知, 要使展开公式(1)式完全收敛, 即拟合值 $\tilde{Z}(i, j) = Z(i, j)$, 应把(1)式的截止阶数取为:

$$\begin{cases} K_0 = I_0 - 1 \\ S_0 = J_0(i) - 1 \end{cases} \quad (22)$$

当引入(9)式或(13)式的假定后, 可以对整个区域的收敛截止阶数统一取为:

$$\begin{cases} K_0 = I_0 - 1 \\ S_0 = \max_i [J_0(i) - 1] \end{cases} \quad (23)$$

对于展开公式(1)来说, 以上两式是等价的。因为当 $S \geq J_0(i)$ 时, A_{ks} 对该行 $Z(i, j)$ 已经没有贡献, 该行已经完全拟合即收敛了。

$$\begin{aligned} Z(i, j) &= \sum_{k=0}^{I_0-1} \sum_{s=0}^{\max[J_0(i)-1]} A_{ks} \Phi_k(i) \psi_s(i, j) \\ &= \sum_{k=0}^{I_0-1} \sum_{s=1}^{J_0(i)-1} A_{ks} \Phi_k(i) \psi_s(i, j) + \sum_{k=0}^{I_0-1} \sum_{s=J_0(i)}^{\max[J_0(i)-1]} A_{ks} \Phi_k(i) \psi_s(i, j) \\ &= \sum_{k=0}^{I_0-1} \sum_{s=0}^{J_0(i)-1} A_{ks} \Phi_k(i) \psi_s(i, j) \end{aligned} \quad (24)$$

这表明对于非矩形网格, 各行收敛速度不一样, 格点数少的行先收敛。而在实际计算上, 用(23)式作为资料完全拟合的条件更为方便。

3. 未规一化公式

上述公式中的车贝雪夫多项式都是规一化的。对于未规一化的车贝雪夫多项式，利用两步展开法，同样可以导出其在非矩形网格上展开时的有关公式。现分列如下：

$$\tilde{Z}(i, j) = \sum_{k=0}^{K_0} \sum_{s=0}^{S_0} \hat{A}_{ks} \hat{\phi}_k(i) \hat{\psi}_s(i, j) \quad (25)$$

$$\hat{A}_{ks} = \sum_{i=1}^{I_0} \left[\sum_{j=1}^{J_0(i)} Z(i, j) \hat{\psi}_s(i, j) / \sum_{j=1}^{J_0(i)} \hat{\psi}_s^2(i, j) \right] \hat{\phi}_k(i) \cdot 1 / \sum_{i=1}^{I_0} \hat{\phi}_k^2(i) \quad (26)$$

式中 $\hat{\phi}_k(i)$, $\hat{\psi}_s(i, j)$ 皆为未规一化的车贝雪夫多项式，即：

$$\sum_{j=1}^{J_0(i)} \hat{\psi}_s^2(i, j) \equiv 1, \quad \sum_{i=1}^{I_0} \hat{\phi}_k^2(i) \equiv 1 \quad (27)$$

以上公式更明显地体现了非矩形格点上逐行展开的特点，并且更适于手算。

若令

$$\begin{cases} \nu_{si}^2 = \sum_{j=1}^{J_0(i)} \hat{\psi}_s^2(i, j) \\ \mu_k^2 = \sum_{i=1}^{I_0} \hat{\phi}_k^2(i) \end{cases} \quad (28)$$

则规一化与未规一化的车贝雪夫多项式之间的关系为：

$$\begin{cases} \Psi_s(i, j) = \hat{\psi}_s(i, j) / \nu_{si} \\ \Phi_k(i) = \hat{\phi}_k(i) / \mu_k \end{cases} \quad (29)$$

而在二维情况下，两者之间的关系为：

$$\Phi_k(i) \Psi_s(i, j) = \hat{\phi}_k(i) \hat{\psi}_s(i, j) / \mu_k \nu_{si} \quad (30)$$

4. A_{ks} 及标准场的物理意义

由(1)和(25)式可知，二维车贝雪夫多项式 $\phi_k(i) \psi_s(i, j)$ 或 $\hat{\phi}_k(i) \hat{\psi}_s(i, j)$ 代表了在非矩形网格上给定的函数的某种标准分布，我们称其为标准场。原始函数场 $Z(i, j)$ 可以用各阶标准场的加权和来拟合，展开系数 A_{ks} 或 \hat{A}_{ks} 实际上是相应的权重系数。

注意到在非矩形网格上定义的这些标准场的图形与所要给定的函数无关，只取决于网格点的分布。由于格点是任意不规则的，因此这些标准场的图形相对于等距矩形网格上的标准场就会发生某种变形。但是这种变形是有规律的，其特点是：在 ξ 方向上不变形，在 η 方向上总是以各行中点的连线（一般情况下是曲线）为轴线呈对称或反对称的，即随该连线的形状而变形。一旦格点分布确定了，其标准场的图形也就固定下来（参见图3）。

由于格点分布允许任意不规则，只要根据问题适当排列选择格点，相应标准场图形的等值线总可以与气象要素分布的等值线或某种特征线（如经纬线、地形线等）相互接近，从而赋予标准场以明确的物理意义，这有利于车贝雪夫系数和展开结果的解释，并加快了收敛速度。正是这一点使本文所推广的展开方法具有了更大的灵活性和适用性。

另外在非矩形网格下，规一化和未规一化标准场的图形会有不同，这是由于在(30)

式中 ν_{0i} 与行号 i 有关。特别是 $k=0, s=0$ 的标准场。未规一化时, $\hat{\Phi}_0(i)\hat{\Psi}_0(i, j) \equiv 1$, 因此 \hat{A}_{00} 仍代表均匀场的权重。而规一化时, $\nu_{0i} = \sqrt{J_0(i)}, \mu_0 = \sqrt{I_0}, \Phi_0(i)\Psi_0(i, j) = \frac{1}{\sqrt{I_0 \times J_0(i)}} \equiv \text{常数}$, 随行 i 而改变。它不再代表均匀场, 而是一个带状分布场, $J_0(i)$ 较小的行, 场值较大。 A_{00} 的意义也就不同了。

四、计算实例

西北太平洋 37 点月海温场是北京气象中心定期发布的重要资料, 其格点分布见图 2, 它可以表示为:

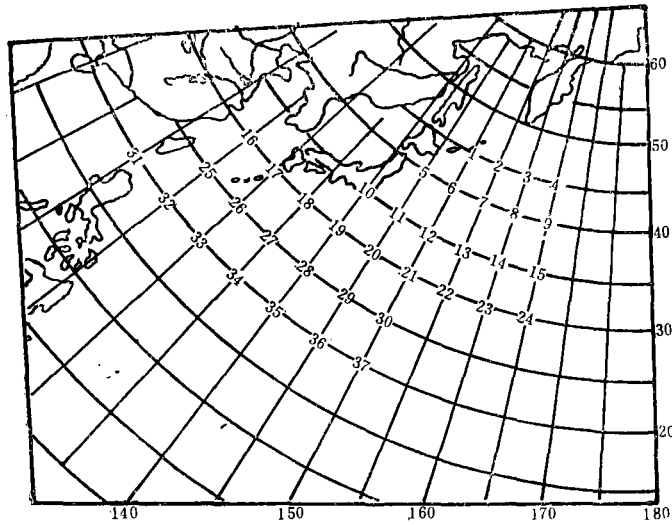


图 2 西北太平洋 37 点海温资料格点分布

$$\begin{cases} i=1, 2, \dots, I_0 \\ j=1, 2, \dots, J_0(i) \end{cases}$$

这里 $I_0=6, J_0(i)$, 见表 1。

表 1 海温格点分布参数

i	1	2	3	4	5	6
$J_0(i)$	4	5	6	9	6	7

在此非矩形网格上作二维车贝雪夫多项式展开, 前几个标准场的图形见图 3, 图中并对规一化和未规一化以及等距矩形网格的标准场作了比较。

可以看到, 当 $s=0$ 时, 标准场反映了海温沿纬向的各种带状分布。当 $k=0$ 时, 标准场反映了海温沿海岸线的各种带状分布, 这正是该海域上黑潮暖流的特征。其他变形场也都反映了海温沿海岸线的分布特征。这是因为所取网格的各行中点连线, 恰好平行于海岸线, 正是黑潮暖流的轴线方向。

所用的资料为 1982 年 7 月。展开系数中除去 A_{00} , 最大的是 A_{10} 。展开的截止阶数

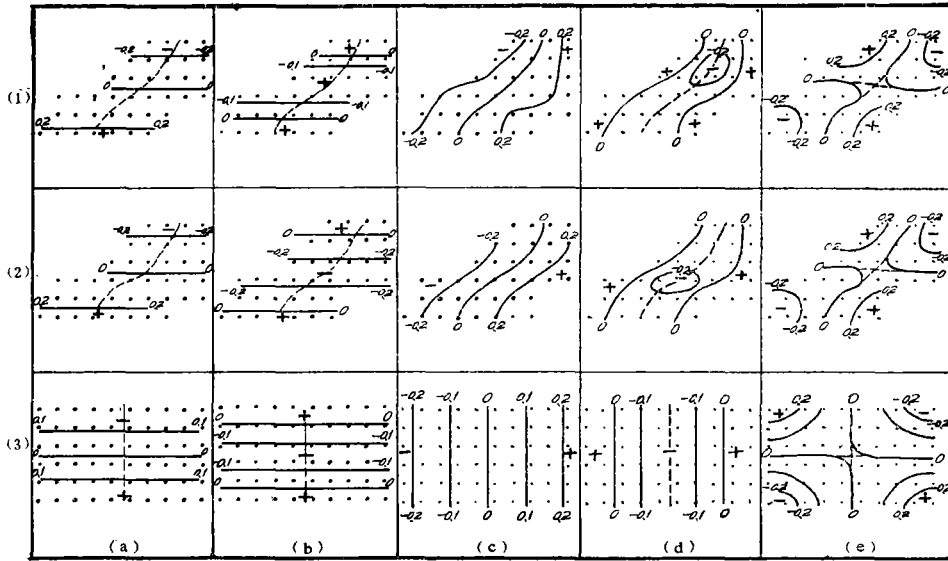


图3 二维车贝雪夫多项式标准场图形

(1) 非矩形网格规一化的 (2) 非矩形网格未规一化的 (3) 等距矩形网格的
(a) $\phi_1\psi_0$ 场 (b) $\phi_2\psi_0$ 场 (c) $\phi_0\psi_1$ 场 (d) $\phi_0\psi_2$ 场 (e) $\phi_1\psi_1$ 场

与拟合均方差的关系见表2。

表2 西北太平洋海温展开的均方差(单位 $^{\circ}\text{C}$)

σ \ S_0 \ K_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6	8.6
1	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4	3.4
2	1.9	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
3	1.9	1.9	1.9	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8	1.8
4	1.6	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5	1.5
5	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	0.0

可以看到满阶 $K_0=5, S_0=8$ 时全部拟合。而且随 K_0 增大收敛得非常快, 随 S_0 增大收敛变化很小。这都表示了海温纬向分布南高北低的特征。

五、结 语

1. 在二维车贝雪夫多项式展开中, 把确定的格点数 J_0 推广到变数 $J_0(i)$ (即 $J_0(i)$), 采用先按行展开, 再按列展开的两步方法, 实现了在非矩形格点上对函数的展开, 这是本文的关键。

2. 本方法很容易推广到多维的情况。

3. 本方法的优点在于: (1) 可以在任意不规则格点上展开, 而且当 $J_0(i)=J_0$ (常数) 时, 就包括了矩形网格的情况。(2) 可以加快展开时的收敛速度, 物理意义清楚, 因此具有更大的实用价值。

参 考 文 献

- [1] 周家斌, 不规则格点上的车贝雪夫多项式展开问题, 科学通报, 26, 548—550, 1981; 大气科学, 7, 239—248, 1983。
[2] 李黄、刘桂芝, 黑龙江省月降水分布的定量预报, 黑龙江气象科技, 1983, 1—2, 23—35。

ON THE EXPANSION OF CHEBYSHEV POLYNOMIALS AT NON-RECTANGULAR GRIDS

Li Huang Liu Guizhi

(Institute of Meteorology, Heilongjiang Province)

Zhou Jiabin

(Institute of Atmospheric Physics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, it is shown that at any 2-dimensional non-rectangular irregular grids, the function may be expanded in Chebyshev Polynomials, by using the two-step expanding method, e. g. firstly expanded according to lines, then according to arrays. It is found that the results are useful in forecasting practice.