

斜压大气纬圈平均运动特征的振动*

谢 义 炳

(北京大学地球物理系)

提 要

本文是纬圈平均大气运动特征的振动^{[1]**}文的推广,以同样的观点和方法,用简单的两层模式处理大气的斜压性,并考虑了简单的辐射过程,得出了500毫巴面纬圈平均温度和一些纬圈平均运动特征、以及纬圈平均经圈环流的中期振动。

本文的主要科学目的除了探寻以线性理论处理极端复杂和高度非线性的大气中期运动过程的可能性和限度外,还希望探寻用准涡旋运动等近似观点讨论某些大气环流基本问题的可能性。

一、引 言

哈德莱^[2]1735年就企图说明现实的大气环流是怎样从一个简单的环流发展出来的。后来,许多气象工作者,包括现代的一些气象工作者,沿着哈德莱的探索方法和基本思路做了许多工作。哈德莱所假设的简单环流是地球没有自转时的热力环流,而重点放在引进地球自转后出现的信风等原来简单环流中没有的现象。现代许多研究工作所假设的简单环流是静止状态。

现实的大气环流显然不是从地球没有自转时的环流或静止状态发展出来的,而是在地球由一个热星体转变为一个冷星体的过程中形成的。当前我们还不能研究过去几十亿年中的详细演变过程,但可以把目标放低些,即承认地球大气发展史的当前现实状态,从现实大气中各种场的客观存在及其相互关系出发,探索较短时间里的变化过程。

现实的大气环流在宏观上是准水平、准地转、准静力运动。这种运动是可以用准水平、准地转、准静力的观点和方法来处理的。

现实的大气环流不是封闭的,大气与宇宙空间和地面之间有辐射热量交换。对整个大气可以说是辐射平衡的,就局地大气说,一般是辐射不平衡的,这种辐射不平衡是与运动相互制约的。在我们的重点研究时间尺度里,运动并不向某一方向不断发展,而是振动性的。局地的不平衡辐射过程也是一样,可以试把局地不平衡的辐射过程看成是一种准非绝热过程。当然,大气与地面、水面甚至宇宙空间之间还有物质交换,但我们这里暂时将其忽略。本文把所有这些准水平、准涡旋、准静力、准地转和准非绝热过程和运动都当作客观

* 1981年7月27日收到,同年10月29日收到修改稿。

** 在该文发表后,巢纪平同志曾提请作者注意,Thompson, P. D. 曾用传统的湍流理论得出类似该文的(17)式,即 $\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = \bar{v}^2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2}$ (Tellus, 1957)。

存在,并不企图加以解释。它们也的确还没有严格的解释。从这些客观存在事实出发,可能探索较短期的变化过程。本文就是根据这种指导思想设计的,但限于几天到二十天上下的中期过程。

本文谋求得到一些定性结论和分析解,采用了两层模式,辐射过程的考虑也是很粗略的。

二、支配方程组的建立

本节将由动力学和热力学基本方程出发,建立斜压大气中纬圈平均特征的支配方程组。

1. 纬圈平均特征的动力学方程

下面是众所周知的方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + u \frac{\partial \eta}{\partial x} + v \frac{\partial \eta}{\partial y} + \omega \frac{\partial \eta}{\partial p} = f \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} = f(u_g - u) \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (3)$$

这里 η 是绝对涡度

$$\eta = f + \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \quad (4)$$

由方程(1),(3)得通量形式的涡度方程

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u \eta}{\partial x} + \frac{\partial v \eta}{\partial y} + \frac{\partial \omega \eta}{\partial p} = f \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (5)$$

取纬圈平均,以符号“—”表示纬圈平均值,得

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v} \eta}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\omega} \eta}{\partial p} = f \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} \quad (6)$$

以 v 乘方程(5),以 η 乘方程(2),相加取纬圈平均,得

$$\frac{\partial \overline{v \eta}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v \eta}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{v v \eta}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{v \omega \eta}}{\partial p} = f \overline{v \frac{\partial \omega}{\partial p}} + f \overline{\eta (u_g - u)} \quad (7)$$

采用准涡旋近似^[1]

$$\overline{v \omega \eta} \doteq \overline{v \omega} \bar{\eta}, \quad \overline{v v \eta} \doteq \overline{v^2} \bar{\eta}, \quad \overline{\eta (u_g - u)} \doteq \bar{\eta} (u_g - u) \quad (8)$$

利用方程(3)改写方程(2),取纬圈平均,再采用准定常近似^[1],略去 $\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}$,得

$$\frac{\partial \bar{v} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v} \omega}{\partial p} = f \overline{(u_g - u)} \quad (9)$$

将方程(8),(9)应用于方程(7),得

$$\frac{\partial \overline{v\eta}}{\partial t} + \overline{v^2} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial y} + \overline{v\omega} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial p} = f \overline{v} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p} \quad (10)$$

由方程(6), (10), 并取 $\overline{v^2}$ 和 f 为常数, 得

$$\frac{\partial^2 \overline{\eta}}{\partial t^2} - \overline{v^2} \frac{\partial^2 \overline{\eta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \overline{\omega\eta}}{\partial t \partial p} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\overline{v\omega} \frac{\partial \overline{\eta}}{\partial p} \right) = f \frac{\partial^2 \overline{\omega}}{\partial t \partial p} + \frac{\partial}{\partial y} \left(f \overline{v} \frac{\partial \overline{\omega}}{\partial p} \right) \quad (11)$$

$\overline{v^2}$ 取作常数是由于在方程(9)中, 如取 $u_\epsilon = u$, $\frac{\partial \overline{v\omega}}{\partial p} = 0$, 则 $\overline{v^2}$ 近似是常数^[1]。 f 近似取纬度 45° 处的值。

采用两层模式, 以下标 1, 2, 3 分别表示 250, 500, 750 毫巴。将方程(11)用于层 1, 得

$$\frac{\partial^2 \overline{\eta}_1}{\partial t^2} - \overline{v_1^2} \frac{\partial^2 \overline{\eta}_1}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\overline{\omega_2 \eta_2}}{p_2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\overline{v_1 \omega_1} \overline{\eta}_2}{p_2} \right) = \frac{f}{p_2} \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \left(f \frac{\overline{v_1 \omega_2}}{p_2} \right) \quad (12)$$

根据准水平近似, 略去方程(12)中的垂直输送项, 即方程(12)中除 $\frac{f}{p_2} \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial t}$ 外, 所有包含垂直运动的项都加以略去。方程(12)简化为

$$\frac{\partial^2 \overline{\eta}_1}{\partial t^2} - \overline{v_1^2} \frac{\partial^2 \overline{\eta}_1}{\partial y^2} = \frac{f}{p_2} \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial t} \quad (12a)$$

同理, 将方程(11)应用于层 2 和层 3, 得

$$\frac{\partial^2 \overline{\eta}_2}{\partial t^2} - \overline{v_2^2} \frac{\partial^2 \overline{\eta}_2}{\partial y^2} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \overline{\eta}_3}{\partial t^2} - \overline{v_3^2} \frac{\partial^2 \overline{\eta}_3}{\partial y^2} = -\frac{f}{p_2} \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial t} \quad (14)$$

方程(13)和文[1]中的振动方程(25)完全相同。方程(12a)和(14)也是振动方程, 但 $\overline{\eta}_1$ 和 $\overline{\eta}_3$ 的振动受辐散的影响, 等号右边的项不是零。

下面把方程(12a), (14)合并为 $\overline{\eta}_2$ 的振动方程, 以便与下节的纬圈平均热力学方程相联系。取

$$\begin{aligned} \overline{v_2^2} &= a^2 \\ \overline{v_3^2} &= \overline{v_2^2} - \Delta \overline{v_3^2} = a^2 - \Delta a_3^2, \Delta \overline{v_3^2} = \Delta a_3^2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \overline{v_1^2} &= \overline{v_2^2} + \Delta \overline{v_1^2} = a^2 + \Delta a_1^2, \Delta \overline{v_1^2} = \Delta a_1^2 \\ \overline{u_1} + \overline{u_3} &= 2 \overline{u_2}, \overline{\eta_1} + \overline{\eta_3} = 2 \overline{\eta_2} \end{aligned} \quad (16)$$

方程(12a)加(14), 并由方程(13), (15), (16)得

$$\frac{\partial^2 (\overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_3)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (\overline{\eta}_1 + \overline{\eta}_3)}{\partial y^2} = 0 \quad (17)$$

$$\Delta a_1^2 \frac{\partial^2 \overline{\eta}_1}{\partial^2 y} - \Delta a_3^2 \frac{\partial^2 \overline{\eta}_3}{\partial y^2} = 0 \quad (18)$$

方程(12a)减(14), 利用(18)得

$$\frac{\partial^2 (\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}_3)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 (\overline{\eta}_1 - \overline{\eta}_3)}{\partial y^2} = \frac{2f}{p_2} \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial t} + 2 \Delta a_3^2 \frac{\partial^2 \overline{\eta}_3}{\partial y^2} = \frac{2f}{p_2} \frac{\partial \overline{\omega}_2}{\partial t} + 2 \Delta a_1^2 \frac{\partial^2 \overline{\eta}_1}{\partial y^2} \quad (19)$$

方程(19)的左边是纬圈平均热成风涡度的自由振动, 右边含有 $\overline{\omega}_2$ 的项是在自转地球上

与水平辐散相联系的垂直运动对这种自由振动的影响; 含有 Δa_1^2 或 Δa_3^2 的项是斜压大气中垂直切变对这种自由振动的影响。

在静力平衡和地转平衡假定下

$$\begin{aligned} -\left(\frac{\partial\phi}{\partial p}\right)_2 &= \alpha_2 = \frac{RT_2}{p_2}, \bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_3 = R\bar{T}_2 \\ \bar{\eta}_1 - \bar{\eta}_3 &= -\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial y} + \frac{\partial\bar{u}_3}{\partial y} = \frac{1}{f} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\bar{\phi}_1 - \bar{\phi}_3) = \frac{R}{f} \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (20)$$

由(16),(18)得

$$\frac{\partial^2 \bar{\eta}_1}{\partial y^2} = \frac{2\Delta a_3^2}{\Delta a_1^2 + \Delta a_3^2} \frac{\partial^2 \bar{\eta}_2}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{\eta}_3}{\partial y^2} = \frac{2\Delta a_1^2}{\Delta a_1^2 + \Delta a_3^2} \frac{\partial^2 \bar{\eta}_2}{\partial y^2} \quad (21)$$

由此, 方程(19)可改写成

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{T}_2}{\partial t^2 \partial y^2} - a^2 \frac{\partial^4 \bar{T}_2}{\partial y^4} &= \frac{2f^2}{Rp_2} \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t} + s^2 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_2}{\partial y^2} \\ s^2 &= \frac{2f}{R} \frac{\Delta a_1^2 \Delta a_3^2}{\Delta a_1^2 + \Delta a_3^2} \end{aligned} \quad (22)$$

a^2 可以称为径向平流参数, 文[1]中曾有讨论。 s^2 可以称为惯性斜压参数。 \bar{T}_2 是 500 毫巴面纬圈平均温度, 可以近似地看成是 750 到 250 毫巴面间单位空气柱垂直平均温度的纬圈平均值。

方程(22)就是本文希望由动力学方程出发, 以准水平、准静力、准地转、准涡旋和准定常等近似观点建立的两层模式中垂直和纬圈平均温度的振动方程。 $\bar{\eta}_2$ 是可以由方程(13)解出的。

2. 纬圈平均特征的热力学方程

热力学方程的一般形式是

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + \omega \frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\partial \omega}{c_p} = \frac{Q}{c_p} \quad (23)$$

改写上式为通量形式, 再取纬圈平均得

$$\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}T}{\partial y} - \sigma \bar{\omega} + \bar{T} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} = \frac{\bar{Q}}{c_p} \quad (24)$$

这里静力层结参数 σ 取作常数, 即

$$\sigma = -\left(\frac{\partial T}{\partial p} - \frac{\alpha}{c_p}\right) = -\frac{T}{\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p} = \text{常数} \quad (25)$$

另由方程(23), (2), (3)可得

$$\frac{\partial \bar{v}T}{\partial t} + \frac{\partial \bar{v}vT}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}\omega T}{\partial p} - \frac{\partial \bar{v}\omega}{c_p} = \frac{\bar{v}Q}{c_p} + f \overline{T(u_g - u)}$$

采用准涡旋近似, 并利用方程(9), 上式改写成

$$\frac{\partial \bar{v}T}{\partial t} + \bar{v}^2 \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} - \sigma \bar{v}\omega = \frac{\bar{v}Q}{c_p} \quad (26)$$

由方程(24), (26)得

$$\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial t^2} - \bar{v}^2 \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} = \sigma \left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{v\omega}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial t} T \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p} + \frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} - \frac{\partial \overline{vQ}}{\partial y} \right) \quad (27)$$

方程(27)的左方是纬圈平均温度的自由振动,右方是垂直运动和非绝热过程对这种振动的影响。

两层模式中, \bar{Q}_2 为 750—250 毫巴间空气柱里单量空气平均加热率的纬圈平均值,可以看成是 500 毫巴面单量空气加热率的平均值。注意 $\left(\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial p}\right)_2 = 0$ 。仍以 α^2 代 \bar{v}_2^2 , 得

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial y^2} = \sigma \left(\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t} - \frac{\partial \overline{v_2 \omega_2}}{\partial y} \right) + \frac{1}{c_p} \left(\frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial t} - \frac{\partial \overline{v_2 Q_2}}{\partial y} \right) \quad (28)$$

取 $\frac{d\bar{\omega}}{dt} = 0$, 并展开之, 利用连续方程, 取纬圈平均后得

$$\frac{\partial \bar{\omega}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v\omega}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\omega\omega}}{\partial p} = 0 \quad (29)$$

两层模式中, 上式作如下形式

$$\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_2 \omega_2}}{\partial y} = 0 \quad (29 a)$$

另在绝热过程中, 加热率 $Q = 0$ 。在非绝热过程中, $Q \neq 0$ 。现取 $Q \neq 0$, $\frac{dQ}{dt} = 0$, 并命名为准非绝热过程。加热率的个别变化为零时, 加热率的局地变化与运动引起的热量输送有相互制约的关系。按照处理 $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ 的办法处理 $\frac{dQ}{dt}$, 得

$$\frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial t} + \frac{\partial \overline{v_2 Q_2}}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

可以命名这种近似方法为准非绝热近似。

将方程(29 a), (30)代入方程(28)得

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial t^2} - \alpha^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial y^2} = 2\sigma \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t} + \frac{2}{c_p} \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial t} \quad (31)$$

查尼(Charney)^[3]曾在辐射平衡温度沿经向作线性分布的假定下, 对 \bar{Q}_2 作过估计。如把 y 坐标原点取在赤道, 以 α_0 作为地球半径, 则查尼的表达式可以改写成

$$\bar{Q}_2 = \frac{4 g \nu (2 - \nu) \sigma_s T_m^4}{2 p_2} \left(1 + \frac{\pi}{16} - \frac{y}{4 \alpha_0} - \frac{\bar{T}_2}{T_m} \right) \quad (32)$$

这里 $\nu = 0.8$ 是大气的长波辐射吸收率, σ_s 是波耳兹曼-斯蒂芬 (Boltzmann-S Stefan) 常数, T_m 是大气的平均温度, 近似于大气的平均辐射平衡温度, 取为 240°K 。 $T_m \left(1 + \frac{\pi}{16} - \frac{y}{4 \alpha_0} \right)$ 是纬度 y 处的辐射平衡温度。

$$\frac{2}{c_p} \frac{\partial \bar{Q}_2}{\partial t} = - \frac{4 g \nu (2 - \nu) \sigma_s T_m^3}{c_p p_2} \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} = - 2 \delta^2 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} \quad (33)$$

$$\delta^2 = \frac{2 g \nu (2 - \nu) \sigma_s T_m^3}{C_p p_2} \quad (33)$$

即加热率的局地变化与温度的局地变化相反。在大气吸收的辐射热量不变的情况下, 大气温度的增加将增加大气辐射出去的热量。因此, 增温区将失去热量, 反之亦然。

将方程(33)代入方程(31), 得

$$\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial y^2} = 2\sigma \frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t} - 2\delta^2 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} \quad (34)$$

方程(34)是由热力学方程出发建立的两层模式中垂直和纬圈平均温度的振动方程, 左边是 \bar{T}_2 的自由振动部分, 右边是层结大气中垂直运动和辐射过程对 \bar{T}_2 的振动的影晌。 δ^2 可以命名为辐射参数。

3. 垂直和纬圈平均温度的支配方程

方程(22), (34), (13) 构成一个封闭的偏微分方程组, 理论上可以在适当的边值和初值条件下求解 $\bar{\eta}_2, \bar{\omega}_2, \bar{T}_2$ 。由方程(22), (34) 消去 $\frac{\partial \bar{\omega}_2}{\partial t}$, 得

$$\frac{\partial^4 \bar{T}_2}{\partial t^2 \partial y^2} - a^2 \frac{\partial^4 \bar{T}_2}{\partial y^4} - b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial t^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial y^2} - 2b^2 \delta^2 \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} = s^2 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_2}{\partial y^2} \quad (35)$$

$$b^2 = f^2 / \sigma R p_2$$

b^2 可以命名为惯性层结参数, 是柯氏参数 f 和静力层结参数 σ 相对大小的度量, 下文还将进一步讨论。 $\bar{\eta}_2$ 可以由方程(13)解出。

三、 \bar{T}_2 和其他纬圈平均特征值的解

求解方程(35)可以分为两步。先求左边齐次部分适合给定的边值和初值条件下的通解 \bar{T}_{2H} , 再求非齐次方程适合零边值和零初值条件下的一个特解 \bar{T}_{2N} , 两者相加就得到全解。

1. 方程(35)齐次部分的通解 \bar{T}_{2H}

方程(35)的齐次部分是

$$\frac{\partial^4 \bar{T}_{2H}}{\partial t^2 \partial y^2} - a^2 \frac{\partial^4 \bar{T}_{2H}}{\partial y^4} - b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{2H}}{\partial t^2} + a^2 b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{2H}}{\partial y^2} - 2b^2 \delta^2 \frac{\partial \bar{T}_{2H}}{\partial t} = 0 \quad (35a)$$

令

$$\bar{T}_{2H} = e^{-\mu t} \Gamma(t) Y(y) \quad (36)$$

其中 $\Gamma(t)$ 和 $Y(y)$ 分别是 t 和 y 的函数, μ 是实际的阻尼率, 其值待定。将(36)式代入方程(35a), 因为 μ 的值是待定的, 可以增加一个条件, 取 Γ 的一阶微商项的系数为零。

以符号“ $'$ ”表示全微商, 得联立方程

$$(Y'' - b^2 Y) \Gamma'' + [\mu b^2 (2\delta^2 - \mu) Y + (\mu^2 + a^2 b^2) Y'' - a^2 Y'''] \Gamma = 0 \quad (37)$$

$$\mu Y'' + b^2 (\delta^2 - \mu) Y = 0 \quad (38)$$

这里(38)是常微分方程, 现在还不能定出 μ 的确定值, 下文再定。因为希望求得振动解, 暂把 μ 当作小于 δ^2 的某常数。由方程(37)得

$$\frac{\Gamma''}{a^2\Gamma} = \frac{a^2Y'''' - (\mu^2 + a^2b^2)Y'' - \mu b^2(2\delta^2 - \mu)Y}{a^2(Y'' - b^2Y)} = -k^2 \quad (39)$$

或

$$\Gamma'' + a^2k^2\Gamma = 0 \quad (39a)$$

$$a^2Y'''' + (a^2k^2 - \mu^2 - a^2b^2)Y'' - b^2[a^2k^2 + \mu(2\delta^2 - \mu)]Y = 0 \quad (39b)$$

方程(39a)的解是

$$\Gamma = A_1 \cos akt + A_2 \sin akt \quad (40)$$

这里, A_1 和 A_2 是待定系数。方程(39b)的解也必须也适合方程(38)。令

$$Y \sim e^{r^2 y} \quad (41)$$

得方程(38)和(39b)的特征方程

$$r^2 = -\frac{b^2(\delta^2 - \mu)}{\mu} \quad (42)$$

$$a^2r^4 + (a^2k^2 - \mu^2 - a^2b^2)r^2 - b^2[a^2k^2 + \mu(2\delta^2 - \mu)] = 0 \quad (43)$$

(42), (43)是联立代数方程, 求解 r^2 和 k^2 , 得

$$a^2k^2 = \frac{a^2b^2(\delta^2 - \mu) - \mu^3}{\mu}, \text{ 或 } k^2 = \frac{a^2b^2(\delta^2 - \mu) - \mu^3}{a^2\mu} \quad (44)$$

$$r_1^2 = -\frac{b^2(\delta^2 - \mu)}{\mu} = -k_1^2, r_1 = \pm ik_1 \quad (45)$$

$$r_2^2 = \frac{a^2b^2 + 2\mu^3}{a^2} = k_2^2, r_2 = \pm k_2$$

k^2, k_1^2, k_2^2 都是 μ 的函数, 而 μ 的值尚未定出。根据(42), (44)式, 求得 \bar{T}_{2H} 的振动解的条件是

$$\mu < \delta^2 \quad (46)$$

$$\mu^3 < a^2b^2(\delta^2 - \mu) \text{ 或 } \mu^3 + a^2b^2\mu - a^2b^2\delta^2 < 0 \quad (47)$$

根据三次代数方程理论^[47], 如 x_1 为(47)的实根, 则

$$\mu - x_1 < 0 \text{ 或 } \mu < x_1$$

$$x_1 = \left(\frac{a^2b^2\delta^2}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left[\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2b^2}{27\delta^4}}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4a^2b^2}{27\delta^4}}\right)^{\frac{1}{3}} \right] \quad (48)$$

取下述参数值¹⁾

$$a^2 = 2.5 \times 10 \text{ 米}^2 \text{秒}^{-2}, f^2 = 1.06 \times 10^{-8} \text{秒}^{-2} \quad (49)$$

$$6 p_2 = 24^\circ\text{C}, \nu = 0.8, T_m = 240^\circ\text{K}$$

$$b^2 = 1.54 \times 10^{-12} \text{米}^{-2} = 1.6 \times 10^{-12} \text{米}^{-2}, \delta^2 = 3.0 \times 10^{-7} \text{秒}^{-1}$$

将上述各参数值代入(48)式, 得

$$x_1 = 3.0 \times 10^{-7} \text{秒} = \delta^2 \quad (50)$$

所以, 不等式(46)和(48)是一致的, 它们确定了 \bar{T}_{2H} 有振动解时 μ 所在的区间。

由此, 方程(39b)和(35a)的解依次为

$$Y = A_3 \cos k_1 y + A_4 \sin k_1 y + A_5 e^{k_2 y} + A_6 e^{-k_2 y} \quad (51)$$

1) 这里 a^2 的值是参考斯莫格林斯基(Smagorinsky)^[53]的工作估计出来的。在文[1]中取大了, 特此更正。

$\bar{T}_{2H} = e^{-\mu t} (A_1 \cos a k t + A_2 \sin a k t) (A_3 \cos k_1 y + A_4 \sin k_1 y + A_5 e^{k_2 y} + A_6 e^{-k_2 y})$ (52)
 A_3, A_4, A_5, A_6 等系数可以在下述边值条件下求出, 当然要求非零解。

$$\begin{aligned} y=0, Y=Y''=0 \\ y=l, Y=Y''=0 \end{aligned} \quad (53)$$

得

$$\begin{aligned} A_3 = A_5 = A_6 = 0, A_4 \neq 0 \\ \sin k_1 l = 0, k_{1n} = \frac{n\pi}{l}, n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (54)$$

这里 k_{1n} 是空间 (y 方向) 频率, n 是 0 到 l 间波数的两倍。由 (45), (54) 式, 得

$$k_{1n}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{b^2 (\delta^2 - \mu_n)}{\mu_n} = \frac{b^2 \left(1 - \frac{\mu_n}{\delta^2}\right)}{\mu_n / \delta^2} \quad (55)$$

(55) 式指出 μ 是 n 的函数, 它还确定了在给定 b^2, δ^2, l^2 等值情况下, μ_n / δ^2 与空间频率或波长的关系。 μ_n / δ^2 的意义在下节还要讨论。表 1 为不同的 n 时, μ_n / δ^2 的值以及时间频率、周期和 e -衰期。取 l 为赤道到极点的距离即 10^7 米。表中各值只取两位有效数字。

表 1

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
μ_n / δ^2	0.94	0.80	0.63	0.50	0.38	0.30	0.25	0.19	0.16	0.13
μ_n (10^{-7} 秒 $^{-1}$)	2.8	2.4	1.9	1.5	1.1	0.90	0.72	0.57	0.48	0.39
$a^2 k_{1n}^2$ (10^{-12} 秒 $^{-2}$)	2.3	9.6	21	39	63	90	120	160	200	260
$a^2 k_n^2$ (10^{-12} 秒 $^{-2}$)	2.2	9.5	21	39	63	90	120	160	200	260
$a k_n$ (10^{-6} 秒 $^{-1}$)	1.5	3.1	4.6	6.2	7.9	9.5	11	13	14	16
$\frac{2\pi}{a k_n}$ (周期) (10^6 秒)	4.3	2.0	1.4	1.0	0.78	0.66	0.57	0.49	0.44	0.39
(周期) (天)	50	24	16	12	9.0	7.6	6.6	5.7	5.1	4.5
$\frac{1}{\mu_n}$ (e -衰期) (10^6 秒)	3.6	4.2	5.3	6.7	8.8	11	14	18	21	26
(e -衰期) (天)	41	49	61	77	100	130	160	200	230	300

由表 1 可以看到许多具有几天到几十天振动周期的谐波, 它们的 e -衰期也是很长的。

(52) 式可以改写成

$$\bar{T}_{2H} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} (A_{1n} \cos a k_n t + A_{2n} \sin a k_n t) \sin k_{1n} y \quad (56)$$

系数 A_4 已与 A_{1n}, A_{2n} 合併。取初值条件

$$t=0, \quad \bar{T}_{2H}=\varphi_1(y), \quad \frac{\partial \bar{T}_{2H}}{\partial t}=\varphi_2(y) \quad (57)$$

则得

$$\begin{aligned} A_{1n} &= \frac{2}{l} \int_0^l \varphi_1(z) \sin k_{1n} z dz \\ A_{2n} &= \frac{2}{\alpha k_{1n} l} \int_0^l \left[\varphi_2(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n A_{1n} \sin k_{1n} z \right] \sin k_{1n} z dz \end{aligned} \quad (58)$$

表达式(56),(58)就是方程(35 a)的通解。

2. 方程(35)的特解 \bar{T}_{2N} 和全解 \bar{T}_2

求方程(35)的特解前,先求方程(13)的通解,即 $\bar{\eta}_2$ 的表达式。假定地转涡度沿经向作线性分布,只考虑 $\bar{\eta}_2$ 的振动部分,在下述边值和初值条件下

$$\begin{aligned} y=0, l, \quad \bar{\eta}_2 &= 0 \\ t=0, \quad \bar{\eta}_2 &= \psi_1(y), \quad \frac{\partial \bar{\eta}_2}{\partial t} = \psi_2(y) \end{aligned} \quad (59)$$

方程(13)的解是

$$\begin{aligned} \bar{\eta}_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} (B_{1n} \cos \alpha k_{1n} t + B_{2n} \sin \alpha k_{1n} t) \sin k_{1n} y \\ B_{1n} &= \frac{2}{l} \int_0^l \psi_1(z) \sin k_{1n} z dz \\ B_{2n} &= \frac{2}{\alpha k_{1n} l} \int_0^l \psi_2(z) \sin k_{1n} z dz \\ k_{1n} &= \frac{n\pi}{l}, \quad n=1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (60)$$

将(60)式代入方程(35),得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \bar{T}_{2N}}{\partial t^2 \partial y^2} - \alpha^2 \frac{\partial^4 \bar{T}_{2N}}{\partial y^4} - b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{2N}}{\partial t^2} + \alpha^2 b^2 \frac{\partial^2 \bar{T}_{2N}}{\partial y^2} - 2b^2 \delta^2 \frac{\partial \bar{T}_{2N}}{\partial t} \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cos \alpha k_{1n} t + C_{2n} \sin \alpha k_{1n} t) \sin k_{1n} y \\ C_{1n} = s^2 k_{1n}^2 B_{1n}, \quad C_{2n} = s^2 k_{1n}^2 B_{2n} \end{aligned} \quad (61)$$

令

$$\bar{T}_{2N} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \Gamma_{Nn}(t) Y_{Nn}(y) \quad (62)$$

这里, $\Gamma_{Nn}(t), Y_{Nn}(y)$ 分别是 t 和 y 的函数。将(62)式代入方程(61),取 Γ_{Nn} 的一阶微商项系数为零,得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mu_n t} \{ (Y'_{Nn} - b^2 Y_{Nn}) \Gamma'_{Nn} + [\mu_n b^2 (2\delta^2 - \mu_n) Y_{Nn} + (\mu_n^2 + \alpha^2 b^2) Y'_{Nn} - \alpha^2 Y''_{Nn}] \Gamma_{Nn} \} \\ = - \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cos \alpha k_{1n} t + C_{2n} \sin \alpha k_{1n} t) \sin k_{1n} y \end{aligned} \quad (63)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\mu_n Y''_{Nn} + b^2(\delta^2 - \mu_n) Y_{Nn}] = 0 \quad (64)$$

(63), (64) 是联立常微分方程组, 只要求一个特解。由方程(64)得

$$\begin{aligned} \mu_n Y''''_{Nn} + b^2(\delta^2 - \mu_n) Y''_{Nn} &= 0 \\ \mu_n Y''''_{Nn} - b^4(\delta^2 - \mu_n)^2 Y_{Nn} &= 0 \end{aligned} \quad (65)$$

将(64), (65)代入方程(63), 得

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^2 \delta^2}{\mu_n} e^{-\mu_n t} \left[\Gamma''_{Nn} + \frac{a^2 b^2 (\delta^2 - \mu_n) - \mu_n^3}{\mu_n} \Gamma_{Nn} \right] Y_{Nn} \\ = \sum_{n=1}^{\infty} (C_{1n} \cos a k_{1n} t + C_{2n} \sin a k_{1n} t) \sin k_{1n} y \end{aligned} \quad (66)$$

注意到

$$\frac{a^2 b^2 (\delta^2 - \mu_n) - \mu_n^3}{\mu_n} = a^2 k_{1n}^2$$

并取 Y_{Nn} 为富氏正弦级数, 即

$$Y_{Nn} = \sin \frac{n\pi}{l} y = \sin k_n y, n = 1, 2, 3, \dots \quad (67)$$

显然, 这是符合下述零边值条件的

$$y = 0, l, \quad Y_{Nn} = Y''_{Nn} = 0 \quad (68)$$

这样, 方程(66)可改写成一系列的常微分方程

$$\begin{aligned} \Gamma''_{Nn} + a^2 k_{1n}^2 \Gamma_{Nn} = \frac{\mu_n}{b^2 \delta^2} e^{\mu_n t} (C_{1n} \cos a k_{1n} t + C_{2n} \sin a k_{1n} t) \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (69)$$

取下述零初值条件

$$t = 0, \Gamma_{Nn} = \Gamma'_{Nn} = 0 \quad (70)$$

根据标准的数学物理方程求解法和标准的积分方法, 方程(69)的解是

$$\begin{aligned} T_{Nn} &= \frac{1}{a k_{1n}} \int_0^t \frac{\mu_n e^{\mu_n \tau}}{b^2 \delta^2} (C_{1n} \cos a k_{1n} \tau + C_{2n} \sin a k_{1n} \tau) \sin k_{1n} (t - \tau) \\ &= \frac{C_{1n}}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)} \left[\frac{2 a^2 k_{1n}^2 (e^{\mu_n t} - 1) - \mu_n^2}{a k_{1n}} \sin a k_{1n} t + \mu_n (e^{\mu_n t} - 1) \cos a k_{1n} t \right] \\ &\quad + \frac{C_{2n}}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)} [2 a k_{1n} (1 - e^{\mu_n t}) \cos a k_{1n} t + \mu_n (1 + e^{\mu_n t}) \sin a k_{1n} t] \end{aligned} \quad (71)$$

由此, 方程(35)的特解是

$$\bar{T}_{2N} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)} [C_{1n} \mu_n (1 - e^{-\mu_n t}) - C_{2n} 2 a k_{1n} (1 - e^{-\mu_n t})] \cos a k_{1n} t \sin k_{1n} y +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)} \left[C_{1n} \frac{2 a^2 k_{1n}^2 (1 - e^{-\mu_n t}) - \mu_n^2 e^{-\mu_n t}}{a k_{1n}} + C_{2n} \mu_n (1 + e^{-\mu_n t}) \sin a k_{1n} t \sin k_{1n} y \right] \quad (72)$$

而方程(35)的特解是

$$\begin{aligned} \bar{T}_2 &= \bar{T}_{2H} + \bar{T}_{2N} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (G_n e^{-\mu_n t} \cos a k_{1n} t + I_n e^{-\mu_n t} \sin a k_{1n} t + F_n \cos a k_{1n} t + H_n \sin a k_{1n} t) \sin k_{1n} y \\ G_n &\approx A_{1n} + \frac{2 a k_{1n} C_{2n} - \mu_n C_{1n}}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)}, & I_n &= A_{2n} + \frac{\mu_n a k_{1n} C_{2n} - (\mu_n^2 + 2 a^2 k_{1n}^2) C_{1n}}{a k_{1n} b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)} \\ F_n &= \frac{\mu_n C_{1n} - 2 a k_{1n} C_{2n}}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)}, & H_n &= \frac{2 a k_{1n} C_{1n} + \mu_n C_{2n}}{b^2 \delta^2 (\mu_n^2 + 4 a^2 k_{1n}^2)} \end{aligned} \quad (73)$$

其中 \bar{T}_{2H} 是(56)和(58)式所表达的。至此, 500毫巴面纬圈平均温度 \bar{T}_2 随时间和纬度变化的表达式完全求出来了。齐次部分的解 \bar{T}_{2H} 是阻尼振动, 特解 \bar{T}_{2N} 中有阻尼也有非阻尼振动。由于各谐波的 $e^{-\mu_n t}$ 衰期相当长, 在一般所谓中期过程的时间里, 振动是准稳定的。

3. 其他纬圈平均特征值

由方程(34)得

$$2 \sigma \bar{\omega}_2 = \frac{\partial \bar{T}_2}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \int \bar{T}_2 dt + 2 \delta^2 \bar{T}_2 \quad (74)$$

把上节求出的 \bar{T}_2 的表达式代入上式, 注意 $a k_{1n} \doteq a k_n, \mu_n < 2 a k_{1n}$, 得

$$\begin{aligned} 2 \sigma \bar{\omega}_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} 2 (\delta^2 - \mu_n) e^{-\mu_n t} (G_n \cos a k_{1n} t + I_n \sin a k_{1n} t) \sin k_{1n} y + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} 2 \delta^2 (F_n \cos a k_{1n} t + H_n \sin a k_{1n} t) \sin k_{1n} y \end{aligned} \quad (75)$$

前面已确定 $\mu_n < \delta^2$, 则 (75) 式右边是 \bar{T}_2 的表达式(73)中各项分别乘以某正数, 左边 $2 \sigma \bar{\omega}_2$ 是右方各项的总和, 其中每一个组成部分随时间和纬度的变化都是与相应的 \bar{T}_2 的谐波的变化同号的。

由表达式(16), (20), (60), (73)可以求出 $\bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3$, 因此可以求出 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ 。为了节省篇幅, 从略。

四、讨 论

本文把宏观大气运动的一些没有严格解释的性质如准静力、准水平、准地转、准涡旋、准定常和准非绝热等当作地球大气发展史当前阶段中的客观存在事实, 从基本运动方程和热力学方程出发, 采用两层模式, 得出了某些大气特征的纬圈平均值如 $\bar{T}_2, \bar{\omega}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\eta}_2, \bar{\eta}_3, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ 的支配方程, 并求得随时间和纬度变化的表达式。这些表达式实质上是简单的预报方程。它们是一些谐波谱。兹选出 $n=2, n=4$ 作为例子加以简单阐述。取

纬向波长为 L 。

$$n=2, \quad \frac{2\pi}{l}L_2=2\pi, \quad L_2=l$$

$$n=4, \quad \frac{4\pi}{l}L_4=2\pi, \quad L_4=\frac{l}{2}$$

l 是赤道和极点间的距离,各谐波中 $\bar{\omega}_2$ 和 \bar{T}_2 的振动是同号的,可以绘出随纬度 (y) 的示意图。图中 $\Delta\bar{T}_2=\bar{T}_2-T_m\left(1+\frac{\pi}{16}-\frac{y}{4a_0}\right)$ 。

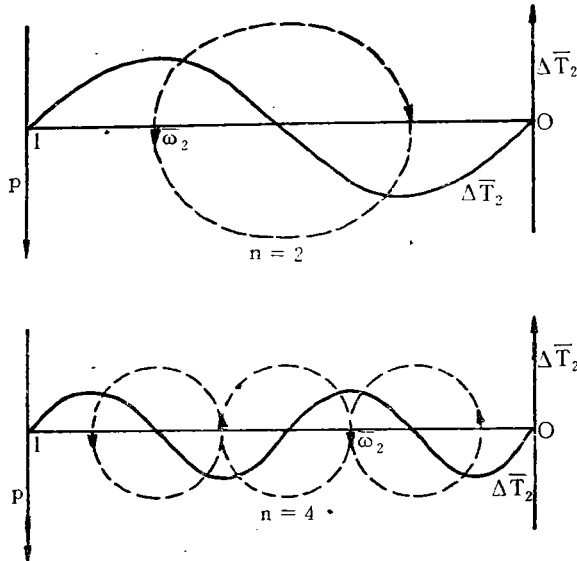


图 1 经圈环流和温度振动示意图

$n=2$, 赤道和极点间有一个波、一个经圈环流; $n=4$, 两个波和三个经圈环流。 n 等于其他值时类似。初值中各谐波的振幅决定于客观存在。由表 1, $n=2$ 的谐波的周期是 24 天, e -衰期 49 天; $n=4$, 周期 12 天, e -衰期 77 天。各依变量的表达式理应可供中期预报之用的。

本文结果指出, 250, 500, 750 毫巴面的纬圈平均运动特征和 500 毫巴面的纬圈平均温度和垂直运动以及经圈环流有同样的谐波振动。这为利用某层, 例如 500 毫巴面纬圈平均特征如西风指数作为中期预

报基础的工作, 提供一个理论支持。最近发现低纬度也有类似中纬度西风指数循环现象, 也可以由本文得到一定程度的说明。

方程 (35) 右边的 $s^2 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_2}{\partial y^2}$ 项, 在数学形式上是强迫函数。实质上, $\bar{\eta}_2$ 的振动是整个环流振动在 500 毫巴涡度场的表现, 结论也没有共振。 $s^2 \frac{\partial^2 \bar{\eta}_2}{\partial y^2}$ 项可以称为表面上的 (apparent) 强迫函数。

空间频率的平方 $k_{1n}^2 = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = b^2 \left(1 - \frac{\mu_n}{\delta^2}\right) / \frac{\mu_n}{\delta^2}$, μ_n 是实际的振动阻尼率, δ^2 是辐射不平衡对振动的阻尼率。当 $\frac{\mu_n}{\delta^2} = 1$ 时, $k_{1n}^2 = 0$, 即没有振动, 波长无限大, 空间频率是零; 当 $\frac{\mu_n}{\delta^2} = 0$ 时, $k_{1n}^2 = \infty$, 0 与 l 间有无限个波长无限小的振动; 当 $\frac{\mu_n}{\delta^2} = \frac{1}{2}$ 时, $k_{1n}^2 = b^2$, $n=4$, 0 到 l 间有两个波、三个经圈环流。无因次参数 $\frac{\mu_n}{\delta^2}$ 起了大气纬圈平均特征振动的空间频率和经圈环流数目的调节作用, 可以称为调节参数。惯性层结参数也可以称为环流结构参数, 或简称结构参数; 还可以称为空间频率参数。

意味深长的是,三圈环流是受到许多气象学家重视并企图加以说明的大气环流特征。很多人从地面摩擦或地气间角动量交换出发提出理论。本文却阐明大气本身的振动中有不同的空间频率和不同数目的经圈环流。当 $\mu_n = \frac{\delta^2}{2}$, 即 μ_n 处于其存在区间 $0 < \mu_n < \delta^2$ 的中点时, 或 $\frac{\mu_n}{\delta^2} = \frac{1}{2}$, 即 $\frac{\mu_n}{\delta^2}$ 处于其存在区间 $0 < \frac{\mu_n}{\delta^2} < 1$ 的中点时, 0 到 1 间有两个波和三个经圈环流。当然, 外摩擦和内摩擦已暗含在大气实际温度之中。实际的三圈环流是一个统计结果。统计结果反映了某个控制特征 μ_n 或 $\frac{\mu_n}{\delta^2}$ 是其许多可能值的中值, 也许是自然界中一个相当普遍的规律。

当 $n=4$, $\frac{\mu_n}{\delta^2} = \frac{1}{2}$ 时, 即存在三圈环流时, 低纬度上升速度最大处偏离赤道。我们的模式是对称于赤道的, 所以这与双辐合带的观测事实是一致的。只是偏离赤道 11 个纬度, 比事实大了一些。考虑水汽的分布和作用可能缩小这个偏距。极地最大下沉区也偏离极点。一般认为极地下沉区偏离极点是海陆分布的作用。本文由大气本身的振动也得出这种结论。但本文假定辐射平衡温度和地转涡度沿经向作线性分布, 因此在边界处的结论应持保留态度的。

平流参数 a^2 只对振动周期或时间频率起作用。 a^2 也可以称为时间频率参数。

本文作者承认大气运动是非线性的, 但认为自线性理论探索大气运动中期过程的潜力还未得到充分发挥。线性理论能给出比较清晰的物理图案, 不失为进一步工作的基础。

致谢: 刘式适、陈受钧和学报审稿同志曾分别对本文初稿提供一些中肯的意见, 谨此致谢。

参 考 文 献

- [1] 谢义炳, 纬圈平均大气运动特征的振动, 气象学报 38 卷 2 期, 111—121, 1980.
- [2] Hadley, G., Concerning the cause of the general trade-winds, *Phil. Trans.*, 29, 58—62, 1735.
- [3] Charney, J., On the general circulation of the atmosphere, *The atmosphere and sea in motion*, The Rockefeller Institute Press, New York, 178—193, 1959.
- [4] 数学手册编写组, 数学手册, 人民教育出版社, 北京, 88—89, 1977.
- [5] Smagorinsky, J., S. Menabe, and J. L., Holloway Numerical results from a nine level general circulation model of the atmosphere, *Mon. Wea. Rev.*, 727—768, 1965.

THE OSCILLATION OF CERTAIN ZONAL MEAN CHARACTERISTICS OF MOTION IN BAROCLINIC ATMOSPHERE

Xie Yi-bing (Yi-Ping Hsieh)

(Department of Geophysics, Peking University)

Abstract

This is an extension of the author's paper^[1] to the baroclinic atmosphere.

The results might show some physical insight of the mechanism of the atmospheric vacillation and mean meridional cells.