第40卷 第4期 气象学报 Vol. 40, No. 4
1982年11月 ACTA METEOROLOGICA SINICA Nov., 1982

关于旋转平行流稳定性理论的注记*

贺海晏

(中山大学气象系)

提 要

本文利用正压涡度方程讨论了旋转平行流的稳定性问题。导出了一个显式正压稳定性判据。它把扰动的增长率 (kc_i) 与能量转换函数直接联系起来了。结果表明，扰动的增长率正比于基本流与扰动间的动能转换率。此外，还讨论了基本流具有线性切变的情形，所得结果与 Haltiner[1]所给出的 $\beta=0$ 时的结果大致类似。

一、引 言

人们早已认识到流体中扰动的发生和发展是与某种流体动力学不稳定性相关联的。在气象上，现在普遍认为中纬度天气尺度的斜压扰动的发生是与气流的垂直切变有关的所谓斜压不稳定性造成的。对于低纬度热带大气而言，在扰动发展初期，与气流的水平切变有关的正压不稳定机制则更值得注意。

关于旋转平行流的稳定性理论是流体动力学中的经典理论之一。早在1880年，Rayleigh 首先得出了关于平行流稳定性的定理（参见 C. C. Lin 的书[2]）。郭晓岚（参见 Haltiner 的书[1]）研究了旋转流体的情形，得出了一个与 Rayleigh 条件相平行的条件，即气象上熟知的正压不稳定判据。它们所确立的只是不稳定性对于基本流方面所要求的约束条件。这些条件本身并不能直接反映出不稳定性的物理机制。从能量的角度来看，不稳定现象取决于基本流与扰动间能量的交换。当基本流的动能转变为扰动动能时，则扰动获得能量而增长起来。反之，若扰动动能向基本流的动能转换，则扰动因失去能量而减弱。我们将根据这种已为人们所熟知的关于不稳性问题的能量机制的定性认识，利用正压涡度方程导出一个波动增长率与能量转换函数直接相联系的关系式。这方面，陈隆勋(1959)[8]曾从不同角度有过讨论。

按照 Rayleigh 和郭晓岚条件，不稳定的必要条件是基本流的绝对涡度存在极值点。不存在这样的点则是中性波的充分条件[3]。于是，在基本流为线性切变流的情形下不能有非中性波。Haltiner 的书中用另一种方法处理了线性切变的情形。他在 $\beta=0$ 的条件下得到了非中性的扰动解，这时扰动是随时间衰减的。我们将在 $\beta\neq0$ 的情况下来处理这个问题。

---

*本文于1980年10月9日收到，1981年8月4日收到修改稿。

二、波的增长率公式·稳定性判据

本文将采用如下的正压涡度方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\beta v=0 \tag{1}$$

其中，u，v 分别为纬向和经向速度分量；β 为罗斯贝参数，取为常数。ζ 为铅直涡度分量。

假定基本流场为平直纬向带流，将(1)式线性化，并引入扰动流函数 ψ，则可得

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi+\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy}\frac{\partial \psi}{\partial x}=0 \tag{2}$$

式中，$U=U(y)$ 为带流速度，$\nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$为二维拉普拉斯算子，$\bar{\zeta}_a\equiv f-\frac{dU}{dy}$为带流的绝对涡度。

设(2)具有如下形式的解

$$\psi=\Phi(y)e^{ik(x-ct)} \tag{3}$$

其中，$\Phi(y)$为振幅因子，k 为纬向波数，c 为相速。将(3)代入(2)式得

$$(U-c)\left(\frac{d^2\Phi}{dy^2}-k^2\Phi\right)+\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy}\Phi=0 \tag{4}$$

对于非中性扰动，c 与 Φ 必为复数，我们令

$$\begin{cases}\Phi=\Phi_r+i\Phi_i\\ c=c_r+ic_i\end{cases} \tag{5}$$

这里，$i\equiv\sqrt{-1}$ 是虚数单位，下标 r 和 i 分别表示实部和虚部。将(5)代入(4)，并将实部和虚部分离，则得

$$\begin{cases}(U-c_r)L(\Phi_r)+c_iL(\Phi_i)+\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy}\Phi_r=0 & (6)\\[2ex] (U-c_r)L(\Phi_i)-c_iL(\Phi_r)+\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy}\Phi_i=0 & (7)\end{cases}$$

(6)，(7)式中的 L 为按下式定义的微分算子

$$L(\quad)\equiv\left(\frac{d^2}{dy^2}-k^2\right)(\quad) \tag{8}$$

用 Φ_i 和 Φ_r 分别乘(6)式和(7)式，然后相减得

$$(U-c_r)[\Phi_iL(\Phi_r)-\Phi_rL(\Phi_i)]+c_i[\Phi_iL(\Phi_i)+\Phi_rL(\Phi_r)]=0 \tag{9}$$

假定在边界 $y=\pm d$ 处，扰动法向速度为零，则边界条件可写为

$$\Phi(d)=\Phi(-d)=0 \tag{10}$$

将(9)式对 y 在$[-d,d]$上积分，注意到由算子 L 的定义，应有下述关系。

$$\Phi_iL(\Phi_r)-\Phi_rL(\Phi_i)=\frac{d}{dy}\left(\Phi_i\frac{d\Phi_r}{dy}-\Phi_r\frac{d\Phi_i}{dy}\right) \tag{11}$$

$$\Phi_iL(\Phi_i)+\Phi_rL(\Phi_r)=\frac{d}{dy}\left(\Phi_i\frac{d\Phi_i}{dy}+\Phi_r\frac{d\Phi_r}{dy}\right)-\left(\left|\frac{d\Phi}{dy}\right|^2+k^2|\Phi|^2\right) \tag{12}$$

利用边界条件(10)，则积分可得如下结果

$$c_i=\frac{\int_{-d}^{d}\left[\left(\Phi_r\frac{d\Phi_i}{dy}-\Phi_i\frac{d\Phi_r}{dy}\right)\frac{dU}{dy}\right]dy}{\int_{-d}^{d}\left(\left|\frac{d\Phi}{dy}\right|^2+k^2\ |\Phi|^2\right)dy} \tag{13}$$

取扰动速度分量为

$$\begin{cases} u=\mathrm{Re}\left(-\dfrac{\partial\psi}{\partial y}\right) \\ v=\mathrm{Re}\left(\dfrac{\partial\psi}{\partial x}\right) \end{cases} \tag{14}$$

“Re”表示取该量的实部。我们定义$\overline{(\quad)}$表示一个纬向波长上的平均值，即

$$\overline{(\quad)}\equiv\frac{1}{l}\int_0^l(\quad)dx \tag{15}$$

式中 $l=2\pi/k$ 为纬向波长。由 (14)和 (15)，我们可以用直接计算的方法证下列关系成立

$$\begin{cases} \overline{(uv)}=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l(uv)\ dx=-\dfrac{k}{2}e^{2kc_it}\left(\Phi_r\dfrac{d\Phi_i}{dy}-\Phi_i\dfrac{d\Phi_r}{dy}\right) \\ \overline{(u^2+v^2)}=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_0^l(u^2+v^2)\ dx=\dfrac{1}{2}e^{2kc_it}\left(\left|\dfrac{d\Phi}{dy}\right|^2+k^2|\Phi|^2\right) \end{cases} \tag{16a}$$

或

$$\begin{cases} \Phi_r\dfrac{d\Phi_i}{dy}-\Phi_i\dfrac{d\Phi_r}{dy}=-\dfrac{2}{k}e^{-2kc_it}\ \overline{(uv)} \\ \left|\dfrac{d\Phi}{dy}\right|^2+k^2|\Phi|^2=2\ e^{-2kc_it}\overline{(u^2+v^2)} \end{cases} \tag{16 b}$$

将(16 b)代入(13)式得

$$c_i=\frac{-\int_{-d}^{d}\overline{(uv)}\dfrac{dU}{dy}dy}{k\int_{-d}^{d}\overline{(u^2+v^2)}\,dy} \tag{17 a}$$

或

$$kc_i=\frac{-\int_{-d}^{d}\overline{uv}\dfrac{dU}{dy}dy}{2\int_{-d}^{d}\dfrac{\overline{(u^2+v^2)}}{2}dy} \tag{17 b}$$

(17)式的物理意义是十分显然的，右边分母的积分代表一个纬向波长上扰动的平均动能，只要有扰动存在，它恒为正值。因此，c_i 的符号完全由右边分子的积分值决定。由能量平衡方程可知积分

$$-\int_{-d}^{d}\overline{uv}\frac{dU}{dy}dy \tag{18}$$

恰为基本流与扰动间的动能转换函数，正值表示基本流的动能向扰动动能转换，负值则表

示相反方向的能量转换。

于是，根据(17)式，正压稳定度判据可变示为

$$\text{当} -\int_{-d}^{d} \overline{uv}\frac{dU}{dy}dy \gtreqqless 0,\ \text{则}\ c_i \gtreqqless 0\ \begin{matrix}\text{扰动增长}\\ \text{中 性}\\ \text{扰动衰减}\end{matrix} \tag{19}$$

根据上述结果，我们容易看到：

扰动的增长率 (kc_i) 通过(17)式与能量转换函数及扰动平均动能直接联系起来了。它正比于基本流与扰动间的能量转换率，反比于其本身的平均动能。(19)式表明，当基本流的动能向扰动能量转换时(积分(18)取正值)，则扰动将增长 ($c_i>0$)，此即不稳定情形。若扰动动能向基本流的能量转换 (积分取负值)，则扰动将衰减($c_i<0$)，相应于稳定情形。如果不存在基本流与扰动间的能量转换 (积分为零)，则扰动将维持其强度不变($c_i=0$)，这就是中性情形。

由积分 (18) 来看，稳定性问题是由基本流场的结构及扰动流场的结构这二个方面的因素所共同决定的。波的不稳定发展要求：一方面，基本流场必须具有水平切变 (即 $dU/dy\neq 0$)。我们不难证明，在一个确定的区域中，总动量保持恒定的平行带流中，以非切变流 (即 $U=$常数) 的动能为最小。即扰动不可能从这种带流中获得能量而增长。另一方面，扰动速度分量(u,v)之间应具有一定的相关，以使 $\overline{uv}\neq 0$。这个条件相当于要求扰动应具有倾斜(如斜槽)结构，即所谓螺旋波[4-6]。例如，对于急流北的曳槽 (图 1) $\overline{uv}>0$，$dU/dy<0$，故 $\overline{uv}\,dU/dy<0$，积分(18)取正值，扰动可从基本流场获得能量而发展($c_i>0$)。类似地，急流南的导槽(图 2)也属发展的。

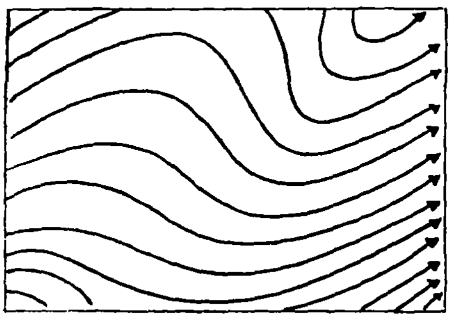

图 1 急流北曳槽

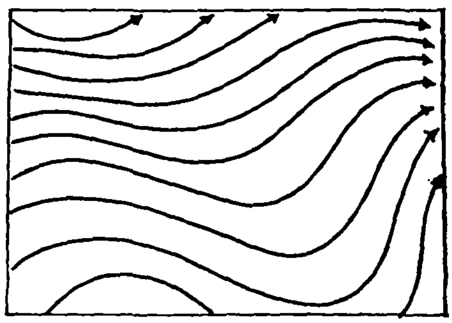

图 2 急流南导槽

三、波 速 公 式

以 Φ_r 及 Φ_i 分别乘(6)式和(7)式然后二式相加，仿照推导(17)式的方法可得波速公式为

$$c_r=\frac{\int_{-d}^{d} U\overline{(u^2+v^2)}dy}{\int_{-d}^{d}\overline{(u^2+v^2)}dy}-\frac{\int_{-d}^{d}\left[U\frac{d^2}{dy^2}\left(\frac{|\Phi|^2}{2}\right)+\frac{d\bar{\zeta}_a}{dy}|\Phi|^2\right]dy}{\int_{-d}^{d}\left(\left|\frac{d\Phi}{dy}\right|^2+k^2|\Phi|^2\right)dy} \tag{20}$$

在基本流场为纬向常值带流(即 U=常数)的简单情况下，(20)便可化为

$$c_r-U=-\frac{\beta\int_{-d}^{d}|\Phi|^2dy}{\int_{-d}^{d}\left(\left|\frac{d\Phi}{dy}\right|^2+k^2|\Phi|^2\right)dy} \tag{21}$$

若设

$$\Phi(y)=A\cos(\pi y/2d)\equiv A\cos(2\pi y/D) \tag{22}$$

其中，$D\equiv 4d$ 为扰动的南北宽度，A 为常值振幅因子。将(22)代入(21)可求得

$$c_r-U=-\frac{\beta}{k^2+(2\pi/D)^2} \tag{23}$$

此即 Haurwitz 波速公式。当扰动宽度为无限，即 $D\to\infty$ 时，上式化为 Rossby 波速公式

$$c_r-U=-\frac{\beta}{k^2} \tag{24}$$

关于一般情况下波的移动规律，我们将在另一篇文章中讨论

四、线 性 切 变

Haltiner 在 $\beta=0$ 的情况下处理过这种情形，我们来考虑 $\beta\neq 0$ 的情形。

设基本流场为纬向线性切变流：

$$U=U_0+sy \tag{25}$$

其中，$S\equiv dU/dy$=常数，U_0 为 $y=0$ 处的带流速度。在条件(25)下，(2)式可写为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\nabla^2\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=0 \tag{26}$$

无穷远处的条件取为

$$|u|,|v|<\infty,\text{当}|x|,|y|\longrightarrow\infty \tag{27}$$

令(26)有如下形式的解

$$\psi=G(t)\cdot F(\xi) \tag{28}$$

$$\xi\equiv x-Ut \tag{29}$$

注意到

$$\begin{cases} F'_x=F'_\xi=\dfrac{dF}{d\xi} \\ F'_y=-stF'_\xi=-st\dfrac{dF}{d\xi} \\ F'_t=-UF'_\xi=-U\dfrac{dF}{d\xi} \end{cases}$$

可求得

$$\begin{cases} \nabla^2\psi=(1+s^2t^2)\,G\dfrac{d^2F}{d\xi^2} \\ \dfrac{\partial}{\partial t}(\nabla^2\psi)=-U\,(1+s^2t^2)\,G\dfrac{d^3F}{d\xi^3}+[G'(1+s^2t^2)+2\,Gs^2t]\dfrac{d^2F}{d\xi^2} \\ U\dfrac{\partial}{\partial x}(\nabla^2\psi)=U(1+s^2t^2)\,G\,\dfrac{d^3F}{d\xi^3} \end{cases}$$

代入(26),并分离变量得如下二个方程

$$\frac{d^2F}{d\xi^2}-\lambda\frac{dF}{d\xi}=0 \tag{30}$$

$$(1+s^2t^2)\frac{dG}{dt}+\left(2\,s^2t+\frac{\beta}{\lambda}\right)G=0 \tag{31}$$

其中 λ 为分离参数,即本征值。显然,仅当 λ 为复值参数时,(31)式对应有波动解。此外,要得到满足条件(27)的波动解,还须 λ 为纯虚数,即不含实部。因此,与问题(26)—(27)的波动解相应的本征值是除原点和无穷远点外的虚轴。按照表示波动的常用符号,记

$$\lambda\equiv ik \qquad (k\text{ 为实数})$$

积分(30)和(31)得

$$\begin{cases} F_k(\xi)=A_k+\widetilde{A}_ke^{ik\xi} \\ G_k(t)=\widetilde{B}_k\exp[i(\beta/sk)\cdot\mathrm{tg}^{-1}(st)]/(1+s^2t^2) \end{cases} \tag{32}$$

式中,$A_k,\widetilde{A}_k,\widetilde{B}_k$ 均为任意常数。将(32)代入(28),并回到原变量则得

$$\psi=A_kG(t)+B_k\exp[ik(x-ct)]/(1+s^2t^2) \tag{33}$$

$B_k\equiv\widetilde{A}_k\cdot\widetilde{B}_k$,(33)式中

$$c\equiv U-[\mathrm{tg}^{-1}(st)/(st)]\cdot\beta/k^2 \tag{34}$$

为波速。由(33)可求得扰动速度分量为

$$\begin{cases} u=-B_k\dfrac{skt}{1+s^2t^2}\sin k(x-ct) \\ v=-B_k\dfrac{k}{1+s^2t^2}\sin k(x-ct) \end{cases} \tag{35}$$

由(35)式可见,扰动是随时间衰减的,其衰减特性与 Haltiner 给出的 $\beta=0$ 时的结果是一致的。Haltiner 指出,所用的方法可用于等温大气的垂直剖面上,波的这种衰减特性可用于解释积云的破坏。作者没有看到过进一步证实这一点的材料,所得结果是否适用于积云尺度的运动,也不见得没有疑问。但是,我们相信,对于海洋或大气中的大尺度运动的演变来说,除了摩擦或其他外源的作用之外,这种正压衰减机制可能是扰动衰减的重要机制。

与 $\beta=0$ 的情形相比,波速公式(34)中多一个西移速度分量

$$c_w\equiv-[\mathrm{tg}^{-1}(st)/(st)]\cdot\beta/k^2 \tag{36}$$

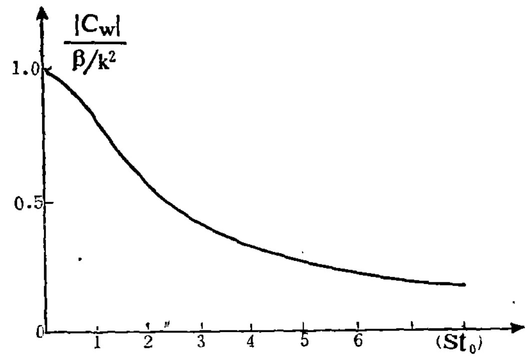

图 3　c_w 随 s 变化的曲线图

无疑，这个速度分量是地球旋转作用（$\beta\doteqdot 0$）造成的。其大小与切变强度(s的大小)有关。对于确定的时刻 t_0，水平切变越强（$|s|$ 越大)，则 $|c_w|$ 越小。即基本流场的水平切变较大时，波动更易于东移。由图 3 可见，当 $s=0$ 时，西移速度达最大，当 $s\to\infty$，$c_w\to 0$。

在 $\beta=0$ 时，(34) 式变为 $c=U_0+sy$，此即 Haltiner 所给出的结果，当 $s=0$ 时，又回到中性罗斯贝波速公式 $c=U_0-\beta/k^2$。

五、小结与讨论

我们从正压涡度方程出发，导出了波的增长率及波速公式。(17)式或 (19) 式把人们熟悉的关于不稳定的能量机制以数学形式表达出来了。由此可知，基本流具有水平切变以及扰动的倾斜结构(或螺旋结构)是正压不稳定的必要条件。

在 $\beta\doteqdot 0$ 及线性切变的情况下，我们所得到的非指数型衰减的扰动解，在衰减特性上与 Haltiner 给出的 $\beta=0$ 时的结果是一致的；而波速除与 y 有关外，还有一个由于地球旋转作用而产生的西移分量，其大小与基本流切变的强度有关，切变较强时，波的这个西移分量则较小。

最后，值得提出的是，作者认为，因为 Rayleigh 条件或者郭晓岚条件都只是从基本状态这一单方面提出的约束条件。实际上可能出现这样的情形，即尽管不满足 Rayleigh 的或郭晓岚条件，而基本流与扰动之间却可以进行能量交换，出现扰动发展的情形。因此，在进行实际的稳定性分析时，从能量形式的判据(19)出发，兼顾基本状态与扰动二者及其相互的联系可能是更有效的方法。 Zangvil, A 和 Yanai, A (柳井)[7] 在研究上部对流层的热带波动的动力性质时，就是这样作的。他们将平均纬向风速廓线与风速分量 (u, v) 的交叉谱分析结果配合起来，判别扰动与主流间的能量转换情况(即判别 $\underline{uv}\ dU/dy$ 的情况)，从而判别基本气流对于不同波长扰动的稳定性。

中国科学院大气物理研究所陈隆勋老师和中山大学力学系周清浦老师给了我许多有益的启发、热情的指导和帮助，谨此表示衷心感谢。

参　考　文　献

[1] Haltiner, J. G. Numerical Weather Prediction, 122—127, 1971.
[2] Lin, C. C. The THeory of Hydrodynamic Stability, 52—53, 1955.
[3] Chin-Shun Yin, Fluid Mechanics, 470—472, 1977.
[4] 巢纪平、叶笃正，正压大气中的螺旋行星波，大气科学，2，81—88，1977.
[5] 刘式适，杨大升，地球大气行星波的螺旋结构，气象学报，37(1)，14—27，1979.
[6] 卢佩生，曾庆存，正压大气中扰动的演变，大气科学，5(1)，1—8，1981.
[7] Zangvil, A. & Yanai M., Upper Tropospheric Waves in the Tropics, Part I, *J. Atmos. Sci.*, 37(2), 283—298, 1980.
[8] 陈隆勋，大气中尺度扰动的不稳定，气象学报，30(1)，85—91，1959.

A NOTE TO THE STABILITY THEORY OF ROTATING PARALLEL FLOWS

He Hai-yan

(Meteorology Department of Zhong-Shan University)

Abstract

The stability problem of rotating parallel flows was discussed by use of the barotropic vorticity equation. A stability criterion of barotropic stability was obtained. It is an explicit expression which relates the perturbation growth rate to the function of the energy conversion between basic motion and perturbation. The results indicate that the growth rate of perturbation is proportional to that of the energy conversion. In addition, the case of a basic flow with horizontal linear shear was treated for $\beta \neq 0$. Some results obtained are similar to that given by Haltiner (1971) for $\beta = 0$. The perturbations are damped waves. The wave speed, however, has a westward component which depends upon the strength of the shear of basic flows.