

有限区域预报中的一些问题

廖洞贤 陆维松

(中央气象局气象科学研究所) (南京气象学院)

提 要

文中首先讨论了在固定边界条件和半固定边界条件下,采用平流方程和浅水波方程计算时引起的误差;给出了误差方程和解析解答。结果证明,在固定边界条件下,采用平流方程时误差以风速从边界向中央传播。在流入处附近,误差使波变平;在流出处附近,波幅增大,波变窄。而采用浅水波方程时,误差则以速度 $|u+c|$ 和 $|u-c|$ 从边界向内传播。可是,在半固定边界条件下,采用平流方程时误差却只以风速沿气流方向传播,没有波的叠加所引起的波幅增大现象。

根据上述结果,作者提出了,在半固定边界条件下,适于平流方程的逆风差分格式,还对格式的计算稳定性进行了讨论。最后,用这格式作了一维套网格的单向和双向方法的个例计算,并用蛙跃格式和欧拉向后差分格式的结果比较。结果发现,修正的单向逆风差分格式最好。

一、 引 言

众所周知,在有限区域预报中,边界误差相当严重。在西风带中,积分时间超过48小时,预报就不太可靠了。这是一个困难的问题。

但是,从大量计算结果发现,由于人为边界条件引起的误差,由边界向中部传播;在流出处附近,波较窄,波幅增长较快,而在流入处附近,波较宽,有变平的趋势。^[1]这些现象,过去虽有人进行过研究,但很不系统,且多着重于流出处的研究,并且,在流入和流出处附近,由于人为边界条件引起的误差对波的歪曲的不同,还没有人研究过。下面我们将针对这些现象进行系统的研究,并提出相应的差分格式。还就套网格预报进行了试验。

二、 固 定 边 界 条 件

1. 平流方程

1) 问题的提出

考虑平流方程

* 本文于1980年10月8日收到,1981年3月20日收到修改稿。

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -u \frac{\partial A}{\partial x} \quad (1)$$

其中 $u = \text{常数}$ 。方程(1)在无界线段内可以有单波形式的准确解

$$A = A_0 \cos m(x - ut) \quad (2)$$

在有限线段 $L: 0 \leq x \leq l$ 内, 则

$$A(0, t) = A_0 \cos mut \quad (3)$$

$$A(l, t) = A_0 \cos m(l - ut) \quad (4)$$

$$A(x, 0) = A_0 \cos mx \quad (5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} A(x, 0) = u A_0 m \sin mx \quad (6)$$

方程(1)在 L 内求解, 其初始条件可以设为(5)的形式。但由于资料的限制, 无法取形如(3)或(4)的条件, 因而, 在实际计算中, 有不少人就取 A 不随时间变化的条件作为边界条件。而且, 由于某些计算的要求, 还要规定两个这样的条件(以下称“固定边界条件”)。这对于方程(1)来说, 边界条件就多了, 问题成为不适定的。这样, 就不可能在这两个条件下, 研究方程(1)的性质或用这些条件求出的解和无界线段的准确解之间的差别了。

不过, 从计算经验来看, 在两个固定边界条件下用方程(1)进行计算时, 在计算开始后一定时间内, 除边界附近计算结果和方程(1)在无界线段内的解相差较大外, 在其他地方相差很小。如果我们能改变问题的提法, 使之成为适定的, (如改变方程阶数, 不改变定解条件)而同时又能解释这些结果, 应该认为, 这种作法是有意义的。

所以, 如果由(1)导出的某方程的解, 在计算开始后一定时间内, 在 L 中部和方程(1)在无界线段内的解相等, 而在边界上又满足两个固定边界条件, 则把这解看作是在这两个条件下用方程(1)计算得到的结果(不计计算造成的误差), 是合理的。下面我们将根据这个想法进行讨论。

从方程(1)可以推出

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (7)$$

易证在条件(5)和(6)下, 方程(7)在无界线段内的 D'Alembert 解就是式(2)。当然, 这解也满足(3)和(4)式。因此, 在初始条件(5)和(6)下, 用两个固定边界条件求得的方程(7)的解是否可以看作是在同样条件下方程(1)的计算结果则只要看在 L 内, 这解和 D'Alembert 解的差的分布就可以了。

2) 误差方程和其解答

为了考查固定边界条件引起的误差, 我们不妨把方程(7)在无界线段内, 在条件(5)和(6)下的解作为准确解, 记作 $A(x, t)$; 而方程(7)在 L 内, 在固定边界条件

$$A(0, t) = A_0, \quad (8)$$

$$A(l, t) = A_0 \cos ml \quad (9)$$

和初始条件(5)、(6)下的解作为计算解,记作 $\hat{A}(x, t)$ 。这两个解一般是不同的。令

$$\delta = A - \hat{A} \quad (10)$$

并令 $l = nA$, n 是正整数, A 是波长, 则 δ 将满足下列方程和定解条件:

$$\frac{\partial^2 \delta}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2}, \quad (11)$$

$$\delta(x, 0) = 0, \quad (12)$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad (13)$$

$$\delta(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq 0 \\ A_0(\cos mut - 1), & \text{当 } t > 0, \end{cases} \quad (14)$$

$$\delta(l, t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq 0 \\ A_0(\cos mut - 1), & \text{当 } t > 0 \end{cases} \quad (15)$$

可以得到方程(11)在定解条件(12)~(15)下的解是

$$\delta = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq \frac{x}{u} \text{ 或 } t \leq \frac{l-x}{u}; \\ A_0[\cos m(x-ut) - 1], & \text{当 } \frac{x}{u} < t; \\ A_0[\cos m(x+ut) - 1], & \text{当 } t > \frac{l-x}{u}; \\ \frac{1}{2}A_0[\cos m(x-ut) + \cos m(x+ut) - 2], & \text{当 } t > \frac{x}{u} \text{ 且 } t > \frac{l-x}{u} \end{cases} \quad (16)$$

利用(10)和(16)式, 则 \hat{A} 的表达式是

$$\hat{A} = \begin{cases} A_0 \cos m(x-ut), & \text{当 } t \leq \frac{x}{u} \text{ 或 } t \leq \frac{l-x}{u}; \\ A_0, & \text{当 } \frac{x}{u} < t; \\ A_0[\cos m(x-ut) - \cos m(x+ut) + 1], & \text{当 } t > \frac{l-x}{u}; \\ \frac{A_0}{2}[\cos m(x-ut) - \cos m(x+ut) + 2], & \text{当 } t > \frac{x}{u} \text{ 且 } t > \frac{l-x}{u} \end{cases} \quad (17)$$

从(16)式可以看出, 误差 δ 是从两个边界点向内传播的, 在未传到的地区, 误差为零。这说明解 \hat{A} 可以看作是在固定边界条件下用方程(1)计算得到的结果(图 1 a-d)从图 1 a-c 中可以看出, 不论在那张图上, 在流入处附近, \hat{A} 为一常数, 波越来越平; 在流出处附近, 波越来越窄, 到 $t = 3A/4u$ 时, 波幅突然增大为原来的 3 倍。这看来可以说明, 在固定边界条件下, 数值预报大多在流出边界附近场特别乱, 容易出现计算不稳定, 而在流入边界附近, 场比较平直(如正野文, 1957^[1])的缘故。

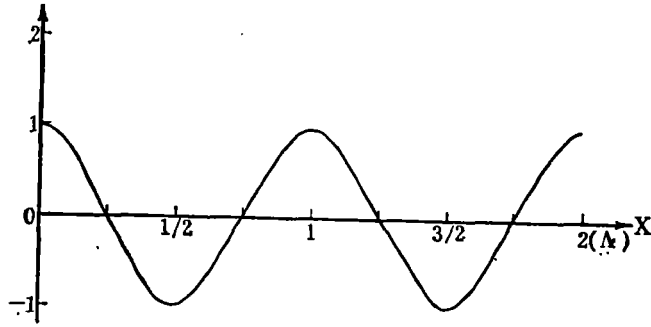


图 1a $t=0$ 时 \hat{A} 沿 X 的分布

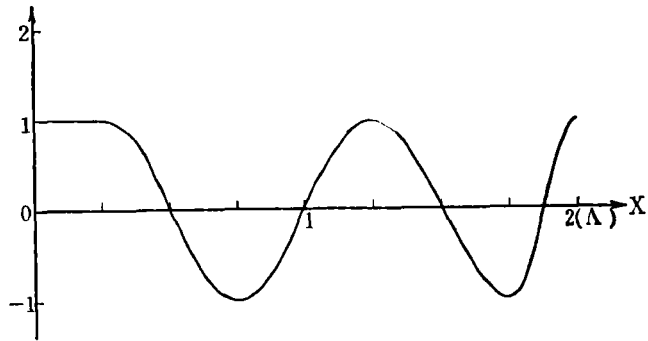


图 1b $t=Lambda/4u$ 时 \hat{A} 沿 X 的分布

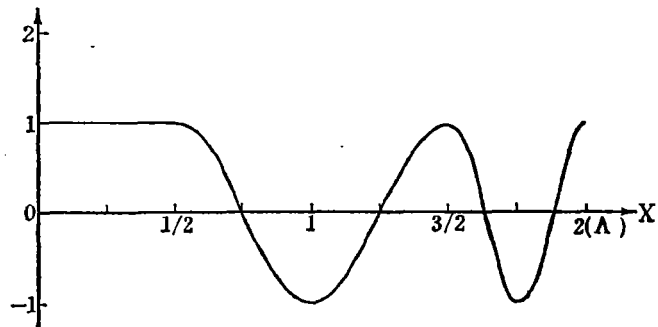
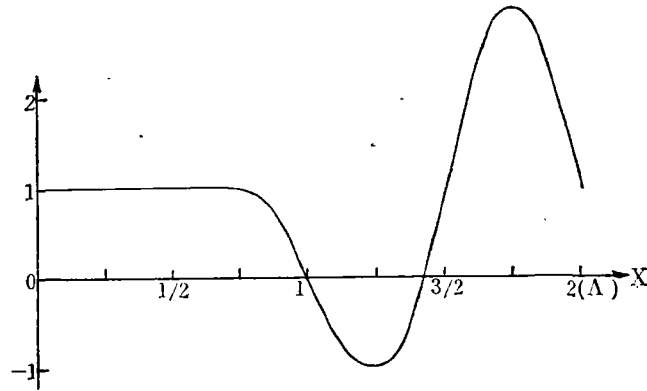


图 1c $t=2*Lambda/4u$ 时 \hat{A} 沿 X 的分布

图 1d $t=3A/4u$ 时 \hat{A} 沿 X 的分布

2. 浅水波方程

在一维空间的情形,线性化的浅水波方程可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + U \frac{\partial \phi}{\partial x} + \Phi \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (19)$$

其中 U 和 Φ 都是常数,其他都是气象上常用的符号。

方程组(18)和(19)可以化成对角型方程组

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_1 \frac{\partial P}{\partial x} = 0, \quad (20)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + v_2 \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

其中 $P = cu + \phi$; $Q = cu - \phi$; $v_1 = U + c$; $v_2 = U - c$; $c = \sqrt{\Phi}$ 。

对方程(20)和(21)分别对 t 微商,可以得到

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = (U + c)^2 \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}, \quad (22)$$

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = (U - c)^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \quad (23)$$

用和前面类似的方法,在线段 L 内,在固定边界条件下求解,可以得到类似的误差方程和定解条件;因而,也可以求出类似的误差表达式。所不同的,只是须用 $U + c$ 和 $U - c$ 分别代替 U 而已。也就是说,在这种情况下, P 的误差以速度 $|U + c|$ 从两个端点向中央传播, Q 的误差以速度 $|U - c|$ 从端点向中央传播。但是,由于 c 远大于风速 U ,其传播速度比平流方程中波的传播为快,其中央可用预报范围也远比之为小。

三、半固定边界条件

所谓半固定边界条件,是指在边界一端某物理量 A 不随时间变化,而在另一端其随时间的变化由预报方程(如方程(1))所决定的边界条件。这种边界条件,Charney 等^[2]在开

始研究数值预报时就曾提出过。他们证明,在这条件下,正压涡度方程的解是唯一的。

现仍以方程(1)为例来进行讨论。

设在流入处,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial t} &= 0, \\ \frac{\partial A}{\partial t} &= -u \frac{\partial A}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

在流出处,

这时,误差方程是

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -u \frac{\partial \delta}{\partial x} \quad (25)$$

如准确解, l 仍和上节所取的一样,则上方程的定解条件可以写为

$$\delta(x, 0) = 0 \quad (26)$$

$$\delta(0, t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq 0, \\ A_0(\cos mut - 1), & \text{当 } t > 0 \end{cases} \quad (27)$$

易见,在条件(26)和(27)下,方程(25)的解是

$$\delta(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{当 } t \leq \frac{x}{u}, \\ A_0[\cos m(x-ut) - 1], & \text{当 } t > \frac{x}{u} \end{cases} \quad (28)$$

上式表明,误差只能由 $x=0$ 处沿 x 方向传播,没有逆风速方向的反射波存在;只有在 $t > l/u$ 后,流出处才会受到影响。

和误差(28)相应的计算解是:

$$A = \begin{cases} A_0 \cos m(x-ut), & \text{当 } t \leq \frac{x}{u}, \\ A_0, & \text{当 } t > \frac{x}{u} \end{cases} \quad (29)$$

从(29)式容易看出,在流入处附近,波将愈变愈平;在误差没有传到的地区,波仍保持原来的形状;在流出处附近,没有波变窄或波幅随时间陡增的现象。这些情况表明,取半固定边界条件,其结果比在固定边界条件下的结果要好,至少从计算稳定性的角度来看,是比较好的。

但是,在浅水波方程或初始方程的情形,则比较复杂。由于这时不仅有沿气流方向传播的波,还有逆气流方向传播的波,直接用形如(24)的条件,不能定解。不过,如对于沿气流方向传播的波,只在流入处规定边界条件,对于逆气流方向传播的波,只在流出处规定边界条件,则对于每一种波来说,这种条件和半固定边界条件相似,其所引起的误差传播的情况也应当是相似的。

四、差分格式

1. 简单的逆风差分格式

根据上节的讨论,如采用半固定边界条件,则因在流出处无法使用中央差,须用向后差代替。为了使物理考虑合理,时间差分还必须用向前差。这就是一般所谓的逆风差分格式。

以二维的平流方程为例,如所知,最简单的逆风差分格式是^[3]

$$A_{i,j}^{(\tau+1)} = A_{i,j}^{(\tau)} - \lambda_1(A_{i,j}^{(\tau)} - A_{i-1,j}^{(\tau)}) - \lambda_2(A_{i,j}^{(\tau)} - A_{i,j-1}^{(\tau)}),$$

(当 $u_{i,j}^{(\tau)}, v_{i,j}^{(\tau)} \geq 0$ 时)

(30)

其中 $\lambda_1 = u_{i,j}^{(\tau)} \Delta t / d$, $\lambda_2 = v_{i,j}^{(\tau)} \Delta t / d$ 。虽然,当判据

$$\frac{\max |\vec{V}| \Delta t}{d} \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
(31)

满足时,这格式是稳定的,并且没有非线性不稳定出现,但是,在时间积分过程中,波幅衰减比较明显,这是一个严重的缺点。下面我们将针对这个问题进行讨论。

2. 改进的逆风差分格式

为了克服简单逆风差分格式的缺点,我们可以推导较高精度的格式。

如不计 u, v 随时间和空间的变化,在 Δt 时刻前位于 $(i - \lambda_1, j - \lambda_2)$ 的空气质点将到达网格点 (i, j) ,按平流方程,我们有

$$A_{i,j}^{(\tau+1)} = A_{i-\lambda_1, j-\lambda_2}^{(\tau)} \quad (32)$$

令

$$A_{i-\lambda_1, j-\lambda_2}^{(\tau)} = A_{i,j}^{(\tau)} + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 - \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2 \right) A d$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 - \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2 \right)^2 A d^2 + \frac{1}{3!} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 - \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2 \right)^3 A d^3 + \dots$$

如沿 x 和 y 方向,当 $n \geq 3$ 时,凡含有 $\frac{\partial^n A}{\partial x^n}$ 或 $\frac{\partial^n A}{\partial y^n}$ 的项,或混合微商中含有 $\frac{\partial^n A}{\partial x^n}$ 或 $\frac{\partial^n A}{\partial y^n}$ 的项,均可略去,则

$$A_{i,j}^{(\tau+1)} = \left(1 - \frac{\partial}{\partial x} \lambda_1 d + \frac{\lambda_1^2 d^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \cdot \left(1 - \frac{\partial}{\partial y} \lambda_2 d + \frac{\lambda_2^2 d^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) A \quad (33)$$

如取 $\frac{\partial A}{\partial x} \approx \frac{1}{2d} \nabla_x A$, $\frac{\partial A}{\partial y} \approx \frac{1}{2d} \nabla_y A$, $\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \approx \frac{1}{d^2} \nabla_x^2 A$, $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \approx \frac{1}{d^2} \nabla_y^2 A$,

则(4.4)式相当于

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla A + O(\Delta t, d^2) \quad (34)$$

其中 \vec{V} 是水平风速; ∇ 是哈密顿标符;还可以取向后差

$$\nabla_x A = \begin{cases} 3 A_{i,j} + A_{i-2,j} - 4 A_{i-1,j}, & \text{当 } u_{i,j} > 0, \\ 4 A_{i+1,j} - A_{i+2,j} - 3 A_{i,j}, & \text{当 } u_{i,j} < 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \nabla_y A &= \begin{cases} 3 A_{i,j} + A_{i,j-2} - 4 A_{i,j-1}, & \text{当 } v_{i,j} > 0, \\ 4 A_{i,j+1} - A_{i,j-2} - 3 A_{i,j}, & \text{当 } v_{i,j} < 0; \end{cases} \\ \nabla_x^2 A &= \begin{cases} A_{i,j} + A_{i-2,j} - 2 A_{i-1,j}, & \text{当 } u_{i,j} > 0, \\ A_{i,j} + A_{i+2,j} - 2 A_{i+1,j}, & \text{当 } u_{i,j} < 0; \end{cases} \\ \nabla_y^2 A &= \begin{cases} A_{i,j} + A_{i,j-2} - 2 A_{i,j-1}, & \text{当 } v_{i,j} > 0, \\ A_{i,j} + A_{i,j+2} - 2 A_{i,j+1}, & \text{当 } v_{i,j} < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(33)式可以写成

$$A_{i,j}^* = A_{i,j}^{(\tau)} - \frac{\lambda_1}{2} (\nabla_x A_{i,j}^{(\tau)} - \lambda_1 \nabla_x^2 A_{i,j}^{(\tau)}), \tag{35}$$

$$A_{i,j}^{(\tau+1)} = A_{i,j}^* - \frac{\lambda_2}{2} (\nabla_y A_{i,j}^* - \lambda_2 \nabla_y^2 A_{i,j}^*) \tag{36}$$

于是,在流出处,除图 2 中 M、N……T 八点外, A 随时间的积分都可以使用(35)和(36)式了。在这八点,可以用其中某点周围三点的 $A_{i,j}^{(\tau+1)}$ 值的算术平均代替该点的 $A_{i,j}^{(\tau+1)}$ 值。在计算区域的内点(指计算域内除边界点以外的点)上,可以取中央差,即

$$\nabla_x A = A_{i-1,j} - A_{i+1,j}, \nabla_x^2 A = A_{j+1,i} + A_{i-1,j} - 2 A_{i,j} \text{ 等, 差分方程仍为(35)和(36)}$$

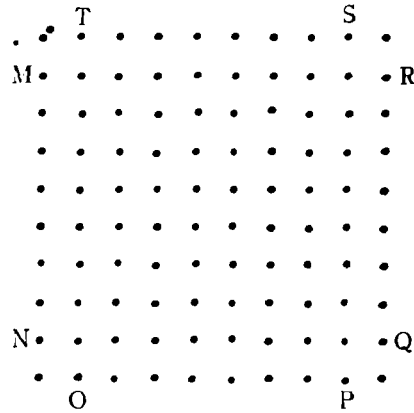


图 2 在边界流出处不能用二阶向后差的网格点

3. 差分格式的稳定性

按照 Richtmyer^[4], 在 λ_1 和 λ_2 均取常数的情况, 我们可以得到, 差分方程(35)和(36)的放大矩阵的特征值 Λ 是

$$\begin{aligned} \Lambda &= \left\{ B_1 + C_1 \cos \frac{2\pi}{p} + D_1 \cos \frac{4\pi}{p} - I \left(C_1 \sin \frac{2\pi}{p} + D_1 \sin \frac{4\pi}{p} \right) \right\} \\ &\cdot \left\{ B_2 + C_2 \cos \frac{2\pi}{q} + D_2 \cos \frac{4\pi}{q} - I \left(C_2 \sin \frac{2\pi}{q} + D_2 \sin \frac{4\pi}{q} \right) \right\} \end{aligned} \tag{37}$$

其中

$$B_1 = 1 - \frac{3}{2} \lambda_1 + \frac{\lambda_1^2}{2}, C_1 = 2 \lambda_1 - \lambda_1^2, D_1 = -\frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_1^2}{2},$$

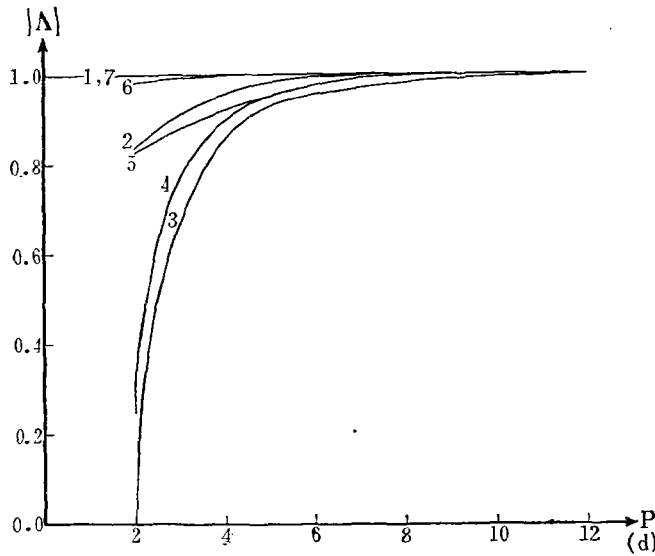


图 3 特征值 $|\Lambda|$ 随 A_x 的分布
(1 表示 $\lambda=0.0$, 2 表示 $\lambda=0.1$, 3 表示 $\lambda=0.3$, 4 表示 $\lambda=0.5$, 5 表示 $\lambda=0.7$,
6 表示 $\lambda=0.9$, 7 表示 $\lambda=1.0$ 。)

$$B_2 = 1 - \frac{3}{2}\lambda_2 + \frac{\lambda_2^2}{2}, \quad C_2 = 2\lambda_2 - \lambda_2^2, \quad D_2 = -\frac{\lambda_2}{2} + \frac{\lambda_2^2}{2};$$

$I = \sqrt{-1}$; p, q 各是沿 x 和 y 方向的波数, $p = A_x/d, q = A_y/d, A_x, A_y$ 各是 x 和 y 方向的波长。

为了简便,我们绘制了在不同 $|\lambda_1|$ 情况下,当 $q \rightarrow \infty$ 时 $|\Lambda|$ 随 A_x 的分布。(图 3)从图中可以看出,当 $|\lambda_1| \leq 1$ 时,对所有的波, $|\Lambda|$ 都小于或等于 1, 即格式是稳定的。在二维的情况,显然,只要 $|\lambda_1| \leq 1$ 且 $|\lambda_2| \leq 1$, 格式就是稳定的; 这实际上要求 $\frac{\max |\vec{v}| \Delta t}{d} \leq 1$ 。

对于差分方程(35)和(36), 当空间差商取中央差时 Crowley^[5]曾证明在一维空间的情况,稳定性判据和上面一样。

五、套网格预报的情形

从经验我们知道,在套网格预报中,粗细网格之间的内边界,特别是流出处附近,常易出现不稳定现象。虽然, Davies^[6]等提出过一些克服这困难的方法,但还不能令人满意。根据差分理论,在粗、细网格中,波动的移速是不同的。若在内边界上,以粗网格预报值作为细网格的边值,则其作用,相对于粗网格,和“固定边界条件”相似。根据这种想法,考虑在一维,粗网格为循环边界的情形,我们用如下五个方案进行了试验,即

方案 1 先计算粗网格,后计算细网格。在内边界用粗网格预报值作为细网格边值。粗细网格均采用格式(35),其中空间差分用中央差。

方案 2 计算方法和方案 1 相同,但在细网格计算区内和粗网格相重的点上,用细网

格预报值代替粗网格的值。

方案 3 在内边界,空间差分用前面提出的向后差。其他和方案 1 相同。

方案 4 在内边界,空间差分用前面提出的向后差。其他和方案 2 相同。

方案 5 在内边界流出处和其下游紧邻二点上,空间差分均用前面提出的向后差,但流出处用细网格距,下游二点用粗网格距。其他和方案 3 相同。

在这些方案中,方案 1,3,5 是 Phillips 所谓的单向方案,方案 2 和 4 是他所谓的双向方案。

试验时取预报区为 16000 公里,粗细网格距分别为 400 和 200 公里,时间步长分别为 1 和 0.5 小时。(图 4)初值为一余弦波,即(5)式。准确解取(2)式。

试验结果如图 4 所示。从图中可以看出,双向方案 2 和 4,不论在计算稳定性、波幅和位相上,都比单向方案 1 和 3 好;而方案 3 在计算稳定性和位相上比方案 1 有改进,特别在内边界流出处附近寄生波消失了。但单向方案 5 比方案 1 和 3 好;在移速上也比双向方案 2 好,和方案 4 相近。由于单向方案工作量少,方案 5 有实用意义。

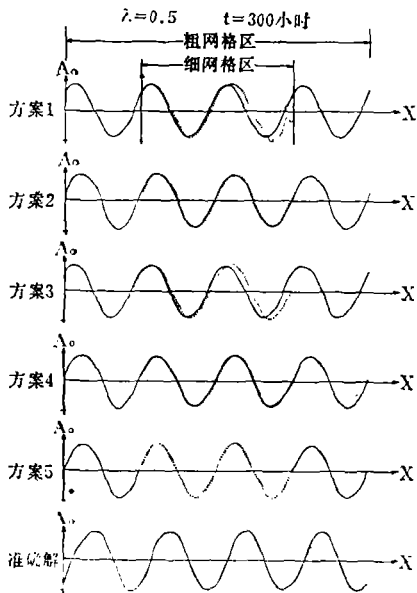


图 4 五种方案计算结果的比较 (实线是粗网格计算值,虚线是细网格计算值。)

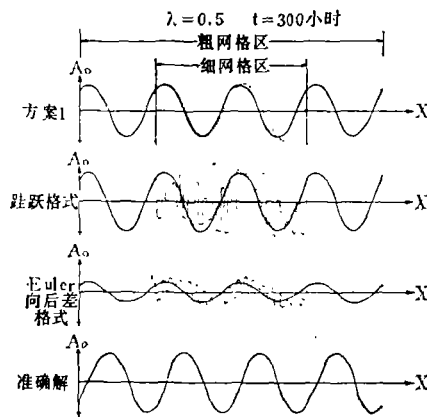


图 5 方案 1 和蛙跃格式,Euler 向后差格式 计算结果的比较(说明同图 4。)

还分别用 Euler 向后差和蛙跃格式(二者空间微商均用中央差,但后者在第 1 个时间步长用三步法向前差)代替方案 1 中所用的格式(35)作了计算。其结果和原方案 1 的结果如图 5 所示。从图中可以看出,不论 Euler 向后差或蛙跃格式,都有明显的寄生波。其中蛙跃格式最明显。Euler 向后差格式则波幅衰减比较明显。在这些方面,方案 1 比它们要好。这些结果看来和前面的理论分析是一致的。

参 考 文 献

- [1] Syono, S., Boundary errors in numerical weather prediction, *J. Meteor. Soc. Japan*, 35, 242-248, 1957.
- [2] Charney, J. G., R.Fjørtoft and J. von Neumann, Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, 2, 237-254, 1950.
- [3] Forsythe, G. E. and W. R. Wasow, Finite-difference methods for partial differential equations, John Wiley & Sons, New York, 1960.
- [4] Richtmyer, R. and K. Morton, Difference methods for initialvalue problems. Interscience, New York, 1967.
- [5] Crowley, W. P., Numerical advection experiments, *Mon. Wea. Rev.*, 96, 1-11, 1968.
- [6] Davies, H. C., On the lateral boundary conditions for the primitive equations, *J. Atmos. Sci.*, 30, 147-150, 1973.

SOME PROBLEMS IN REGIONAL NUMERICAL WEATHER PREDICTION

Liao Dong-xian

(Academy of Meteorological Science, Central Meteorological Service)

Lu Wei-song

(Nanjing Institute of Meteorology)

Abstract

This paper aims at investigating some problems in regional numerical weather prediction, such as the errors caused by conventional artificial boundary conditions and their related computational problems, etc.

In the first place, the errors caused by the so-called "fixed boundary condition" employed for making predictions by using the advection equation, are discussed. The corresponding error equation and its solutions are given. It is shown that under this condition the errors propagate towards the central part of the computational domain from the boundaries with wind speed u . In the vicinity of the inflow boundary, the errors flatten the marching wave. But, on the contrary, in the vicinity of the outflow boundary, the wave amplifies in amplitude abruptly at the time $t(=3\Lambda/4u)$ after the start of computation, where Λ is the wave length. At the same time, the wave becomes much narrower than that at the initial instant. In solving the shallow water equations under the condition, there are two kinds of error propagating towards the interior part of the domain at speeds of $|u+c|$ and $|u-c|$, respectively, where c is the velocity of the external gravity wave.

The errors caused by the semi-fixed boundary condition are also discussed. The results show that they can only propagate along the current and no phenomenon of abrupt amplification of the wave occurs.

In the next place, some space-splitting upstream finite-difference schemes suitable for the advection equation under the semi-fixed boundary condition are proposed and discussions of the related computational stability are made.

Finally, several one-dimensional nested-grid predictions using the schemes are given. By comparing the results with those obtained by the Euler backward scheme and by the leapfrog scheme, it can be found that among the schemes used a proposed one in one-way approach and another proposed one in two-way approach are better than the other ones.