第36卷 第2期　　气 象 学 报　　Vol. 36, No. 2
1966年6月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　June, 1966

大尺度起伏条件下云滴的随机增长

温景嵩
(中国科学院地球物理研究所)

1955年 Telford 曾处理过 Poisson 不连续重力碰并过程[1],这是属于一种相关时间非常短的起伏生长过程. 但是,在云中，有些起伏场尺度还是比较大的,例如与云泡运动有关系的湿度场和含水量场，它们的相关时间可能到 10^2 秒. 在这种背景下,将会进一步加速随机碰并过程.

我们引用 Telford 的随机碰并方程组:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dN(0,t)}{dt}&=-A_0N(0,t),\\ \frac{dN(j,t)}{dt}&=-A_jN(j,t)+A_{j-1}N(j-1,t)\quad(j=1,2\cdots),\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中 $N(0,t)$ 表示体积是初始大小 mv 的大滴浓度, $N(j,t)$ 表示体积是 $(j+m)v$ 的大滴浓度, v 是小云滴体积, A_0, A_j 皆是大滴在单位时间内碰到一个小云滴的概率. $A_j=3(j+m)^{2/3}\Delta uEq/4a\rho$,这里的 Δu 是大小水滴相对末速, E 是捕获系数, a 是小滴半径, ρ 是水的密度, q 是含水量. 在 Telford 的模式中, q 没有起伏. 当 q 也有起伏时,水滴处在 q 和 $q+dq$ 之间的概率将是 $p(q)dq$. 在第一个时段 Δt 里,水滴长大到 $(j+m)$ 大小的概率将是:

$$p(q)dq\cdot N(j,\Delta t;q).$$

综合各种大小的 q 作用结果,水滴浓度将是:

$$N(j,\Delta t)=\int p(q)N(j,\Delta t;q)dq.\tag{2}$$

之后,再由 $N(j,\Delta t)$ 同样求出 $N(j,2\Delta t)$ 等等,一直到 $N(j,t)$.

当水滴半径 $R<50\mu$ 时,相对速度属于 Stokes 阻力范围, $\Delta u\propto R^2$. 方程(1)没有分析解,要用高位数电子计算机来计算. 作为第一步,我们暂时先假设 $\Delta u\propto R$,比例系数用等效方法定出. 即在 $\Delta u=KR$ 时，水滴均匀地长大，当其他条件相同时,要和按 Stokes 阻力情况下均匀生长时间相同. 由此,定出相应的 K 值[1]. 对于 $\Delta u=KR$,公式(1)有分析解如下[1]:

$$N(j,\Delta t;q)=C_{m-1}^{j+m+1}e^{-m\Delta T}(1-e^{-\Delta T})^j,\tag{3}$$

ΔT 是无因次的时段, $\Delta T=3EqK\Delta t/4\rho$,将(3)式代入(2)式后,则

$$N(j,\Delta t)=\int C_{m-1}^{j+m-1}\exp\left(-\frac{3mEK\Delta t}{4\rho}\cdot q\right)\left[1-\exp\left(-\frac{3EK\Delta t}{4\rho}\cdot q\right)\right]^j\cdot p(q)dq.\tag{4}$$

---

1) 这当然会产生误差. 我们曾计算过另一种形式的 Δu, 可以更方便地求出公式(1)的解,即令 $\Delta u\propto R^{-2}$ (此时 $A_j=$ 常数). 其比例系数也用等效方法定出. 在环境不起伏时，不连续碰并速度和上面假设的 $\Delta u\propto R$ 相差不大,仅差3%. 因此,在等效情况下, $\Delta u\propto R$ 和 $\Delta u\propto R^2$,也可能彼此相差不大.

若 $p(q)$分布已知，则可积分出 $N(j, \Delta t)$. 我们 Δt 只计算了一步，就是一步算到底. 这可能使较大云滴出现过早一些. 但并不影响与其他模式比较，例如在计算公式(5)时，我们也使那里的 τ_0 和此处相等. 令 $p(q)$ 是正态分布，其他参数是：$E = 1/2$, $K = 2.5 \times 10^3$ 秒$^{-1}$. $\bar{q}$ 是 1 克/米^3, 小云滴半径 $a = 10\mu$, 大滴初始半径 $R_0 = 12.6\mu$ (即 $m = 2$). 要求的问题是：当大滴初始浓度是 20 个/厘米^{3}时，在多长时间内，才会长出足够多的（按观测应达到 10^1 个/升 · 2μ) $R = 31.7\mu$ (即 $j + m = 32$)的大滴来. 用数值积分方法计算公式(4)更为简便. 正态分布在理论上是无界的. 实际观测到的含水量频率分布，虽然在形状上与正态相近，然而它却是有界的. 在我们的计算中，发现这个问题不大. 当$q > \bar{q} + 3\sigma_q$以后，所起作用很小.

为了和宏观含水量及有起伏的 Telford 模式的结果比较，我们先按公式(3)进行计算. 这时由 12.6μ 随机增长到 31.7μ, 需要 1400 秒. 这当然要比 Langmuir 的均匀连续生长要快好多. 在那种模式里，需要 2940 秒. 对于宏观含水量有起伏时，按公式(4)，当 $\sigma_q = 1$ 时，只需 600 秒即可，比 Telford 的模式快了一倍多. $\sigma_q = 1/2$ 时，需要 900 秒. 即使 σ_q 很小，仅有 1/3, 也只要 1000 秒，仍比 q 不起伏的快 6 分钟左右. 比起均匀连续长大的模式就更要快. 比它早 30—40 分钟就长出了半径 31.7μ 的大滴来.

我们又计算了一种 Poisson 式的含水量概率分布（实际观测中也曾观测到）. 它是正偏态的，可能较正态更为有利. 计算结果，生长时间是 550 秒. 这时，$\bar{q}$ 是 1 克/米^3, σ_q 是 1 克/米^3,相应的正态分布生长时间是 600 秒，只快了 10%，相差不多.

当宏观含水量有起伏时，水滴的重力碰并生长，也常常用连续随机生长模式处理. 这时起伏尺度比较大，要用文献[2]的公式. 对于 $\Delta u = KR$ 的情况，大滴的滴谱将是:

$$
\begin{aligned}
N(R, t) &= \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi\tau_0 t}} \cdot \frac{4\rho}{EKR} \cdot \exp\left(-\frac{\left(\frac{4\rho}{EK}\ln\frac{R}{R_0} - \bar{q}t\right)^2}{2\sigma_q^2\tau_0 t}\right) \\
&= \frac{1}{\sigma_q\sqrt{2\pi\tau_0 t}} \cdot \frac{4\rho}{EKR} \cdot \exp\left(-\frac{\bar{q}^2(\bar{t} - t)^2}{2\sigma_q^2\tau_0 t}\right),
\end{aligned} \tag{5}
$$

τ_0 是相关时间[3]. 用相同参数进行计算，结果表明这种生长速度，虽较均匀连续生长为快，但不如以不连续随机碰并为基础，来讨论 q 有起伏的结果. 当水滴大小相近时，事实上是不能把它们当作连续生长方式来处理的.

以上结果可总结如表 1.

表 1 各种情况下，大水滴由 12.6μ 经重力碰并长大到 31.7μ 所需要的时间(秒)

宏观 q 起伏情况	1/3	1/2	1
均匀的连续生长	2940	2940	2940
不连续碰并生长	1400	1400	1400
q 起伏连续生长	1600	1300	800
q 起伏不连续生长	1000	900	600(正态) 500 (Poisson)

顺便指出，应用本文所提供的这种方法，还可研究在文献[4]中连续性随机增长问题.

或者应用到背景场还有起伏的情况，或者是两个量同时有起伏时，把一个看成是大尺度的背景场，这都会更进一步加速水滴生长过程. 由于方法相似，这里就不再详述了.

参 考 文 献

[1] Telford, J. W., *J. Meteor.*, **12** (1955), 436.
[2] 顾震潮、詹丽珊，气象学报，**32** (1962)，301—307.
[3] 温景嵩，气象学报，**34** (1964)，369—377.
[4] 徐庆芳、李桂忱、温景嵩，气象学报，**36** (1966)，243—248.

（本文于1965年10月8日收到）