第36卷 第2期 气 象 学 报 Vol. 36, No. 2
1966 年 6 月 ACTA METEOROLOGICA SINICA June, 1966

小尺度起伏条件下云滴连续增长的馬尔科夫过程和它在积雨云发展中的作用

徐庆芳 李桂忱 温景嵩
(中国科学技术大学) (中国科学院地球物理研究所)

一、引 言

暖云降水起伏理论说明了云雾降水微物理的一些本质问题[1]. 这方面的一些结果(例如文献[1]—[3])与一些观测事实比较接近. 在文献[4]里曾说明了云中的某些起伏场相关时间可能比较短，水滴的随机增长过程要用马尔科夫过程来处理. 这里有一类不连续地增长过程[5]. 而对于连续的增长过程里,周秀骥也曾指出[6],可应用 Колмогоров 第二扩散方程处理. 本文将在半径的某种函数 $z(R)$ 空间上建立起这种方程，并求出其相应的分析解. 由此,我们可以看出,在起伏凝结和起伏碰并作用下,怎样会在很短时间内,产生足够多的降水胚胎来.

这类起伏过程仍有很大的作用. 不但在全暖的对流云里，而且在有冰晶的积雨云里都有相当的影响. 近年来在中纬度地区的观测，也越来越多地证明了这一点. 我国在湖南和上海都曾发现，大云滴(或叫降水胚胎，大小在 100μ 以上)在各种各样的对流云中普遍存在. 诸如淡积云、中积云、浓积云等. 在浓积云里出现更多，达到了雨滴的浓度(10^2—10^3 个/米^3)甚至最多能达到 10^4 个/米^3，已经足可以产生一次降水了. 国外的一些资料[7,8]也提供了这方面的事实. 还有人曾专门对正在发展成积雨云的浓积云进行观测[9]，结果指出,在所观测过的浓积云中，绝大多数都是先产生了很多的(10^3 个/米^3)大云滴($d > 250\mu$)，然后才形成了冰晶,变成积雨云. 而冰晶一出现,就和原来的大云滴一样大小,它是在大云滴的基础上进一步发展的,而不是相反. 这些事实都说明了,第一,在积雨云发展的前一阶段,暖云的起伏过程，应该能产生出大云滴来，无须冰晶作用. 第二,冰晶产生了以后,它们的尺寸比较大,大云滴也已经形成,所以,这时的冰晶作用不大会象过去所强调的那么重要[10,11].

二、水滴在半径空間上的扩散方程与求解

凝结增长和看作是连续增长的碰并过程,其大滴的半径增长速度是:

$$\frac{dR}{dt} = M(R)Y(t), \tag{1}$$

式中 $Y(t)$ 是云中湿度场、含水量场、或湍流加速场，$M(R)$ 是半径的某种函数. 积分(1)式可得,

$$R = R_0 + \int_0^t \dot{R}(t)dt = R_0 + \int_0^t M(R)Y(t)dt. \tag{2}$$

水滴的长大，就好象它在半径空间上向前运动一样了. $M(R)Y(t)$ 就是运动的拉格朗日

速度．当 $Y(t)$ 在小范围上起伏，而大范围上 $\bar{Y}$ 是均匀的，则水滴的运动速度 $\dot{R}$ 就具有"脉动"性质．这和弥散物质在湍流介质中扩散过程相似．当湍流尺度不大时，可以用扩散方程来处理．然而公式(1)还表明，水滴在半径空间上的运动速度与位置有关，因此，其转移概率也和位置有关，运动成为非均匀的"湍流扩散"．这在真实的湍流扩散中，也还没有解决．不过，在我们的问题中，可以做一个变换，将运动变成"均匀湍流"性质．把公式(1)中的 $M(R)$ 移到公式左方去，并引进新的空间 z，公式(1)—(2)就变成:

$$\dot{z} = \frac{1}{M(R)} \cdot \frac{dR}{dt} = Y(t), \tag{3}$$

$$z = \int_{R_0}^{R} \frac{1}{M(R)} \cdot dR = \int_0^t \dot{z} dt = \int_0^t Y(t) dt \qquad (z > 0), \tag{4}$$

[在(3)式中，对于含水量而言，$Y(t)$ 非负]．这样，水滴在 z 空间上的运动仅和起伏场有关，与 z 大小无关．当运动是高频性的随机运动 ($t \ll \tau_0$)，则可以用抛物型的扩散方程来描写[12]:

$$\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}[\bar{Y} W(z,t)] = \frac{\partial^2}{\partial z^2}[D W(z,t)], \tag{5}$$

式中 $W(z, t)$ 表示水滴在 t 时刻"走"到 z 处的概率．$\bar{Y}$ 是平均"运动"速度，即起伏场的平均值．D 是在 z 空间上的扩散系数．按泰勒定理[13]，由云中起伏场的起伏性质决定:

$$D = \int_0^\infty \sigma_Y^2 H(t) dt = \sigma_Y^2 \tau_0 = \alpha_Y^2 \tau_0 \bar{Y}^2, \tag{6}$$

$H(t)$ 是云中起伏场的拉格朗日相关系数，τ_0 是相关时间，σ_Y^2 是起伏场的方差．α_Y 是起伏强度，$\alpha_Y = \dfrac{\sigma_Y}{\bar{Y}}$.

水滴自凝结核上凝结，以后的大小不会比初始半径要小．在重力碰并增长时，q 值为正，以后也不会再比初始半径小．因此，在 $z = 0$ (即 $R = R_0$) 处有一个不可透过的"反射壁":

$$\left[D \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} - \bar{Y} W(z,t)\right]_{z=0} = 0, \tag{7}$$

考虑初始时刻，大滴是单谱，则有:

$$W(0, z) = \delta(z), \tag{8}$$

δ 是狄拉克函数．在过程中没有其他的源，暂时也先不研究水滴跑到云外的情况，则解还应满足归一条件:

$$\int_0^\infty W(z,t) dz = 1. \tag{9}$$

总结公式(5)，(7)—(9)，得到下列定解条件的扩散方程:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial W(z,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}[\bar{Y} W(z,t)] = \frac{\partial^2}{\partial z^2}[D W(z,t)], \qquad (z > 0) \\
&\left[D \frac{\partial W(z,t)}{\partial z} - \bar{Y} W(z,t)\right]_{z=0} = 0, \\
&W(0, z) = \delta(z), \\
&\int_0^\infty W(z,t) dz = 1.
\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

至于水滴的概率分布密度，由下式中得到：

$$N(R, t) = W(z, t)\cdot\frac{dz}{dR} = \frac{1}{M(R)}W(Z(R), t). \tag{11}$$

以下我们求解方程(10)。

令

$$W(z, t) = u(z, t)\exp(az + bt),$$

代入公式(10)，消掉平流项，以定出 a, b. 马上可得 $a = \overline{Y}/2D$, $b = -\overline{Y}^2/4D$, 则

$$W(z, t) = u(z, t)\exp\left(\frac{\overline{Y}}{2D}z - \frac{\overline{Y}^2}{4D}t\right). \tag{12}$$

将(12)式再代入方程(10)，则有关于 $u(z, t)$ 标准形态的抛物方程：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad u(0, z) = \delta(z),\\ &\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\overline{Y}}{2D}u\right]_{z=0} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

用富氏核变换方程(13)[14]，富氏核 $K(\lambda, z)$ 是：

$$K(\lambda, z) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cdot\frac{\lambda\cos\lambda z + h\sin\lambda z}{(\lambda^2 + h^2)^{1/2}}, \tag{14}$$

式中 $h = \overline{Y}/2D$, 则解出 $u(z, t)$：

$$u(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right) - \frac{\overline{Y}}{2D}\exp\left(\frac{\overline{Y}}{2D}z + \frac{\overline{Y}^2}{4D}t\right)\cdot\left\{1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{z+\overline{Y}t}{2\sqrt{Dt}}} e^{-z^2}dz\right\}. \tag{15}$$

由(12)式可知，此时，

$$W(z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi D t}}\exp\left[-\frac{(z - \overline{Y}t)^2}{4Dt}\right] - \frac{\overline{Y}}{2D}\exp\left(\frac{\overline{Y}}{D}z\right)\left\{1 - \Phi\left(\frac{z + \overline{Y}t}{2\sqrt{Dt}}\right)\right\}, \tag{16}$$

式中 Φ 是误差函数。而水滴概率分布密度 $N(R, t)$, 很易由(11)式求出。

三、小尺度的起伏凝結增长

水滴的凝结增长速度是[1]：

$$\frac{dR}{dt} = \frac{K\Delta C}{\rho}\cdot\frac{1}{R}, \tag{17}$$

式中 K 是水汽分子扩散系数，ρ 是水的密度，ΔC 是过饱和水汽密度，按前节结果：

$$\left.\begin{aligned}&z = \int_{R_0}^{R}\frac{\rho}{2K}dR^2 = \int_0^t \Delta C dt,\\ &Y(t) = \Delta C(t), \qquad \overline{Y} = \overline{\Delta C},\\ &D = \sigma_{\Delta C}^2\tau_0 = \alpha_{\Delta C}^2\tau_0(\overline{\Delta C})^2,\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

式中 α 是起伏強度，$\alpha = \dfrac{\sigma_{\Delta C}}{\Delta C}$. 以下我们按(11)、(16)公式来计算起伏凝结增长速度。

关于 $\overline{\Delta C}$ 的数值，我们用 Neiburger 和钱整武的结果[15]。把他们计算出来的，云滴均匀地由凝结核谱凝结长大到平均半径等于 20 μ 时，所需要的时间，等效地推算到相当于

公式(17)中的 $\overline{\Delta C}$. 计算结果，$\overline{\Delta C} = 3.65 \times 10^{-9}$ 克/厘米^3(积雨云情况). 关于起伏強度，估计有三种可能，即：$\alpha_{\Delta C} = 1, 1/2, 1/3$. 关于 τ_0，以云泡生命估计，大约是 300, 200, 100, 50 秒. 由此,我们选出D值中 $\alpha^2_{\Delta C}\tau_0$ 的 5, 50, 100, 300 秒四种数值，大致可以代表各种強度的起伏，并可进一步算出不同的半径 z 空间上的扩散系数D(表 1). 至于凝结核的初始大小，影响不大，可以忽略不计，$R_0 = 0$. 它们的初始浓度,取做 300—500 个/厘米^3(这大致相应于可以活化起来的大核浓度). 而 $R = 20\mu$ 的浓度，应该达到 1—10 个/厘米$^3 \cdot \mu$，以这段时间作起伏的凝结生长时间. 表 2 列出了计算结果.

表 1 积雨云中起伏湿度场所造成的,在半径 z 空间上各种扩散系数 D (秒·克^2/厘米^6)

$\overline{\Delta C}$ \ $\alpha^2\tau_0$	5	50	100	300
3.65×10^{-9}	6.67×10^{-17}	6.67×10^{-16}	1.33×10^{-15}	4.00×10^{-15}

表 2 积雨云中起伏凝结生长出半径 20 μ 云滴所需要的时间(秒)

n_0 \ D	6.67×10^{-17}	6.67×10^{-16}	1.33×10^{-15}	4.00×10^{-15}
300	1800—1940	1150—1400	950—1250	800—1000
500	1770—1900	1120—1350	870—1190	780—950

表 2 表明，起伏凝结过程在生长 20μ 云滴方面有重要的作用. 没有起伏的均匀生长需要时间 2200 秒(将近 37 分钟)才可形成. 在有中等起伏时会提前到 20 分钟即可. 在很強的起伏条件下，只需 13 分钟，约相当于原来的 1/3. 然而在弱起伏时(例如 $\alpha<30\%$，$\tau_0 < 50$ 秒)则作用不大，生长时间与均匀长大相近.

四、小尺度起伏下重力碰并連續增长

水滴长大到 20μ 以上，这时重力碰并起主要作用，由此一直到降水胚胎，可以看成是连续生长过程. 这种过程的半径增速是：

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Eq}{4\rho}\Delta u. \tag{19}$$

当 q 有小尺度起伏时，同样可以采用方程(10)来解决. 这时(10)式中各变量含义如下：

$$\left.\begin{aligned} \dot{z} &= \frac{4\rho}{E\Delta u}\cdot\frac{dR}{dt} = q = Y, \\ z &= \int_{R_0}^{R}\frac{4\rho}{E\Delta u}dR = \int_0^t \dot{z}(t)dt, \\ \overline{Y} &= \bar{q}, \qquad D = \sigma_q^2\tau_0 = \alpha_q^2\tau_0\bar{q}^2. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

计算时，取 $E = 1/2$，Δu 用顾震潮等的经验公式[2]，$R^2/\Delta u = A + BR$. 在 C. G. S. 制中，$A = 5.5 \times 10^{-7}$，$B = 8 \times 10^{-5}$，$\bar{q} = 1$ 克/米^3. $\alpha_q^2\tau_0$ 也选取 5, 50, 100, 300 秒四种. $R_0 = 20\mu$，$N_0 = 1$—10 个/厘米^3. 降水胚胎 $R = 100\mu$，浓度是 10^2—10^3 个/米$^3 \cdot 10\mu$，达到此浓度时间叫起伏生长时间. 结果列于表 3. 原来均匀生长，需时 47 分钟. 有中等

強度起伏则提前了 50%，只要 23 分钟．有最強的起伏时，可以进一步缩短到 12 分钟．同样，对于弱起伏，$\alpha < 30\%$，$\tau_0 < 50$ 秒，则起伏的作用不大．

表 3　积云中含水量起伏时，由较大云滴（$20\,\mu$）长成降水胚胎（$R = 100\,\mu$）的时间(秒)

起伏场強度 $\alpha^2\tau_0$	5	50	100	300
D(秒・克^2/厘米^6)	5×10^{-12}	5×10^{-11}	10^{-10}	3×10^{-10}
均匀生长时间	2790	2790	2790	2790
起伏生长时间	2200	1500	1200	700

弥散物质在几何空间上扩散，除边界限制外，旣可前进，又可倒退．但含水量并不出现负値，所以云滴在半径空间內，除边界上不倒退外，每一步都是向前的，只是向前的快慢不同．因此，方程(10)还不能完全反映这种运动．当 $\alpha_q < 1$ 时，方程(10)的近似程度好一些．而对 $\alpha_q \sim 1$，甚至大于 1 时，影响就大．这时用方程(10)描述扩散时，对其增长速度估计偏低．我们且用一种数値计算方法，粗略地讨论一下．将全部生长时间分成数段．把第一时段结束时，按方程(10)所得的滴谱，进行分割，分成很多单谱 R_i，R_i 处的浓度现在是 $N(R_i, \Delta t)\Delta R_i$．在第二个时段时，云滴分别由 R_i 出发，各按方程(10)向前扩散，依此类推．最后在结束时，把各自所得结果分别相加，卽可得出终了时的滴谱．我们试算了一种中等強度的起伏，$\alpha_q^2\tau_0 = 50$，(相当于 $\alpha_q = 1/2$，$\tau_0 = 200$ 秒)，原来它生长出降水胚胎时间是 1500 秒．现在，当把 t 分成三段用以上办法处理时(每一段 $\Delta t = 500$ 秒)，则在 1500 秒后产生的降水胚胎有 10^3—10^4 个/米^3・$10\,\mu$ 之多，比前增加了一个量级，眞实的生长时间，要比 1500 秒还要短．

目下对湍流介质中的捕获系数研究还很少．而它对生长时间的影响，在起伏条件下更为突出．本文对 E 做了常数的假设，这种 E 在均匀模式中的作用是线性的．E 値若增一倍，则生长时间缩短一倍．但是，常数 E 在起伏条件下则作用是非线性的，并且作用加大．图 1 给出了 E 值在起伏条件下的影响，这是一种中等強度的起伏，$\alpha_q^2\tau_0 = 100$ 秒．当 $E = 1/2$ 时，$t = 1000$ 秒可以长出 $100\,\mu$ 水滴有 50—500 个/米^3・$10\,\mu$ 之多．如果 E 加大一倍，t 缩小一倍，则长出的 $100\,\mu$ 水滴有 5000—50000 个/米^3・$10\,\mu$，大了两个量级，也就是说，生长时间还可降低．事实上，400 秒就已经有了大水滴 200—2000 个/米^3・$10\,\mu$．反之，如果 $E = 4/10$，是原 E 值的 4/5，那么时间加长到原生长时间的 5/4，卽 1250 秒，是否可以长出同样多的水滴来呢？显然也不行．因此，研究在湍流介质中的捕获系数看来更是需要了．

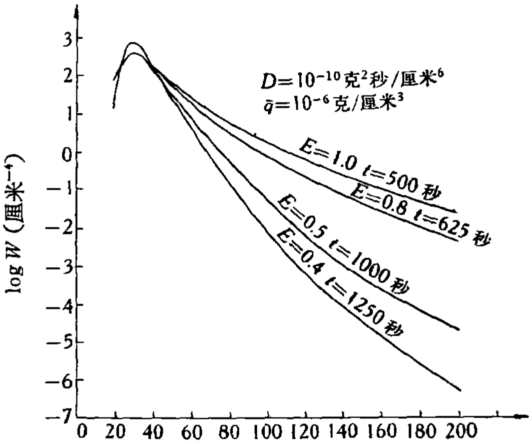

图 1　E 对随机增长的影响
($D = 10^{-10}$ 克^2・秒・厘米$^{-6}$
$q = 10^{-6}$ 克・厘米$^{-3}$)

五、結 語

综合上述各节，得到以下几点初步看法：

（1）当起伏场尺度比较小时，云滴的连续性随机长大，可以化为一个在半径空间上的扩散问题来处理.

（2）这类起伏仍可起相当大的作用. 不但在全暖的积云里，即使在冰晶化的积雨云中也有很大作用. 观测已经表明，在中纬度地区，积雨云的发展，往往在冰晶化以前，在暖云阶段中就已经形成了大量的降水胚胎. 对于这么大的水滴来说，平均的重力碰并速度要比转移凝华来得大[11]，所以，后来冰晶即使出现，其相伴的转移凝华过程可能也不大会象 Bergeron 所強调的那么重要了.

（3）小尺度的起伏凝结和起伏碰并，在积雨云的暖云阶段可以起重要作用. 起伏的強度很強时，只需 20 分钟就可从凝结核长出降水胚胎来. 中等強度的起伏，需时也只要 40 分钟左右.

（4）大水滴的发展，在 0—20 μ 阶段，起伏凝结起重要作用. 其中 10—20 μ 范围，一些碰并过程（重力电碰并、湍流电碰并、不连续重力碰并）又同时起作用. 水滴长到 20 μ 以后，由含水量起伏所造成的连续性重力碰并增长就起主要作用了.

致谢：顾震潮教授在整个工作过程中所给予的指导和鼓励，作者深表谢意.

参 考 文 献

[1] 周秀骥，气象学报，**33** (1963)，97—107.
[2] 顾震潮、詹丽珊，气象学报，**32** (1962)，301—307.
[3] 徐华英、顾震潮，气象学报，**33** (1963)，108—114.
[4] 温景嵩，气象学报，**34** (1964)，369—377.
[5] 温景嵩，气象学报，**36** (1966)，280—282.
[6] 周秀骥，暖云降水微物理机制的研究，科学出版社，1964 年，16—18.
[7] Murgatroyd, R. J., Garrod, M. P., *Q. J. Roy. Met. Soc.*, **86** (1960), 167.
[8] Brown, E. N., & Braham, R. R. Jr., *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), 23—28.
[9] Koenig, L. R., *J. Atmos. Sci.*, **20** (1963), No. 1.
[10] Bergeron, T., Mem. de 5^{me} Ass. Gen. de l'Vnion. Geophy. de Geograp. Intern., 156, 1935.
[11] Houghton, H. G., *J. Met.*, **7** (1950), 363.
[12] Чандрасекар, С., Стохастические проблемы в физике и астономии.
[13] 萨 顿，O. G.，微气象学(中译本)，高等教育出版社，1959 年，105—108.
[14] Будак, Самарский, и Тихонов., Сборник задач по математической физике.
[15] Neiburger, M., 钱整武, Physics of precipitation, 1960, 191—209.

（本文于 1965 年 9 月 28 日收到）