

\*\*\*\*\*  
**短 論**  
\*\*\*\*\*

**迭代法在数值天气预报中应用的注記**

王 宗 皓

(中国科学院地球物理研究所)

制作数值天气预报,常用迭代法求解 Poisson 和 Helmholtz 型方程的边值问题,占用了大部分计算时间,因此需要计算量少而又能保证一定精确度的数值迭代解法. 本文仅对国内数值天气预报中用过的几种迭代法(包括局地格林函数法),提出若干实验数据,可作为这方面的工作者选择解法时参考.

按照迭代法的计算过程,可分为逐点迭代法和线迭代法. 为简便起见,本文只限于讨论矩形区域正方形格网上 Poisson 型差分方程第一边值问题. 对此问题,逐点迭代法可以统一写成如下的计算公式<sup>[1]</sup>:

$$q_0^{(n+1)} = q_0^{(n)} - S \cdot A(R_0^{(n+1,n)}), \quad (1)$$

式中

$$A(R_0) = a_0 R_0 + a_1 \sum_{i=1}^4 R_i + a_5 \sum_{i=5}^8 R_i,$$

$$R_0^{(n+1,n)} = f_0 - (q_1^{(n)} + q_2^{(n)} + q_3^{(n+1)} + q_4^{(n+1)} - 4q_0^{(n)}),$$

$$R_1^{(n+1,n)} = f_1 - (q_9^{(n)} + q_5^{(n)} + q_6^{(n)} + q_8^{(n+1)} - 4q_1^{(n)}),$$

.....

$$R_8^{(n+1,n)} = f_8 - (q_{20}^{(n+1)} + q_{19}^{(n)} + q_4^{(n+1)} + q_1^{(n+1)} - 4q_8^{(n)}).$$

这里的右下足标见图 1 所示的格网点; 上标表示迭代次数  $f$  为已知右端函数;  $a$  为常数系数(比如可取  $a_0 = 3/8, a_1 = 1/8, a_5 = 1/16$ ); 应用公式 (1) 时,在边界上需要假定  $R = 0$ . 式中  $S$  为迭代因子,可用公式计算出它的值.

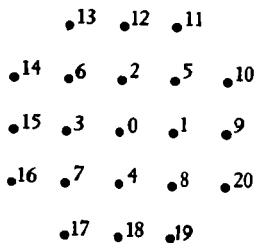


图 1

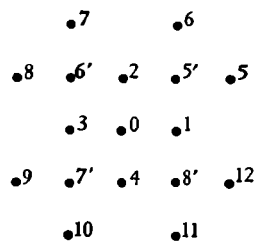


图 2

由公式 (1) 可以得出 Liebmann 迭代法<sup>[1]</sup>.

为了比较公式 (1) 和 Lieb. 方法的计算量,在  $24 \times 20$  个格点(格宽 400 公里)区域

上,用正压地转模式制作 24 小时预报,时间步长取 1 小时,停止迭代的误差满足

$$\max |q^{(n+1)} - q^{(n)}| < \varepsilon \quad (1 \text{ 米/秒}).$$

用公式 (1) 计算倾向值,发现随预报时限延长,不增加迭代次数,平均只要迭代 3—4 次,即可满足误差要求. 在 104 电子计算机上作 24 小时预报,总共约需 14—15 分钟. 改用 Lieb. 方法计算倾向值,平均需要迭代 16—17 次,而且随预报时限延长,迭代次数稍有增加,24 小时预报,总共需要 16—17 分钟,比公式 (1) 多了 2—3 分钟. 倘若先用公式 (1) 迭代一次,然后改用 Lieb. 方法迭代,则总共只需 2—4 次迭代,即可满足误差要求;24 小时预报,约需 12—13 分钟,可节省 4—5 分钟的预报计算时间.

令公式 (1) 中右端的上标  $(n+1)$  和  $(n)$  皆为零,并令  $q^{(0)} = 0$ , 只求一次近似值. 这样由公式 (1) 可以得出局地格林函数法<sup>[2]</sup>:

$$q_0 = -a_0 \cdot f_0 - a_1 \sum_{i=1}^4 f_i - a_5 \sum_{i=5}^{3'} f_i, \quad (2)$$

这里右下足标见图 2 中所示的格点. 这种方法有变态形式,比如把文献[3]中的公式用在正压模式,则可以得出:

$$q_0 = -a'_0 \cdot f_0 - a_0 \sum_{i=1}^4 f_i - a_1 \sum_{i=5}^8 f_i, \quad (3)$$

(3) 式里  $a'_0 = \frac{1}{4}$ , 右下足标见图 2 中所示的格点. 用单波准确解和差分近似解比较分析,可以发现由公式 (2) 和 (3) 得出的近似解和真解的位相,对任何波长都没有差别;但振幅的差别很大,波长小于三个格宽的波幅被夸大十倍. 公式 (3) 对波长小于三个格宽的小扰动波的波幅,比公式 (2) 夸大更严重. 这可能是用局地格林函数法计算出的预报图不光滑,容易出现计算不稳定现象的主要原因. 实际上,在我们用局地格林公式 (3) 试报(未加平滑)的预报图中,出现了许多小扰动波.

下面叙述线迭代法的应用. 对于矩形区域正方形格网上的 Poisson 差分方程, ADI 方法<sup>[4,5]</sup>:

$$\begin{cases} q_0^{(n+\frac{1}{2})} = q_0^{(n)} + S_n(q_1^{(n+\frac{1}{2})} + q_3^{(n+\frac{1}{2})} + q_2^{(n)} + q_4^{(n)} - 4q_0^{(n)} - f_0), \\ q_0^{(n+1)} = q_0^{(n+\frac{1}{2})} + S_n(q_2^{(n+1)} + q_4^{(n+1)} + q_1^{(n+\frac{1}{2})} + q_3^{(n+\frac{1}{2})} - 4q_0^{(n+\frac{1}{2})} - f_0), \end{cases} \quad (4)$$

式中  $S_n$  是加速收敛因子,可用公式近似计算<sup>[5]</sup>:

$$\frac{1 - 2S_{n+1}}{S_{n+1}} = \chi \frac{1 - 2S_n}{S_n}; S_0 = \frac{1}{\alpha + 2}; S \geq \frac{1}{\beta + 2}; \chi > 1,$$

$$\alpha = \min \left( 4 \sin^2 \frac{\pi}{2m}, 4 \sin^2 \frac{\pi}{2l} \right),$$

$$\beta = \max \left( 4 \sin^2 \frac{(m-1)\pi}{2m}, 4 \sin^2 \frac{(l-1)\pi}{2l} \right).$$

这里  $\chi > 1$ , 可取为 4.5;  $l, m$  为  $x, y$  方向的格点数. 公式 (4) 是三阶差分方程,可以分解为两个二阶差分方程,利用边值条件,可用消去法直接计算出  $q^{(n+\frac{1}{2})}$  和  $q^{(n+1)}$ . 实际预报计算时,用四组  $S_n$  的数值就足够了. 计算时间与 Lieb. 方法相同,迭代 3—4 次,即可满足 Lieb. 方法所达到的精确度. 由于存储量太大,计算时间较长,对于八角形预报区域,设计它的程序也比较麻烦,我们还未用它在八角形区域上作过实例预报.

Булеев 方法也是一种线迭代法<sup>[6]</sup>。用它求解矩形区域上的 Poisson 和 Helmholtz 差分方程时,是用相反方向的交替迭代计算,直到求得满足要求精确的解,才终止迭代过程。对于预报问题,边值条件一般是零,故可要求公式中的参数满足零边值条件。零级近似值可以取成零。在北半球两层地转模式预报的计算中<sup>[7]</sup>,应用了这个方法,停止迭代的误差取成:

$$\frac{1}{N} |q^{(n+1)} - q^{(n)}| \leq \varepsilon,$$

这里  $N$  表示内部格点总数,  $\varepsilon \sim 2^{-12}$  (10米/秒),  $\kappa = 0.4$ 。仅应用从左到右的单方向计算公式,计算倾向值,只需 1—2 次迭代就满足误差要求。由此看来,对于预报问题,不必应用计算过程相反的两种公式迭代,收敛已相当快。但这个方法的计算量和存储量都很大,对形状复杂的八角形格网区域,设计程序比较麻烦,在实际预报中应用不大方便。

综合以上讨论,我们认为公式 (1) 或者用公式 (1) 作一次迭代,然后改用 Lieb. 方法,都可以节省较多的计算时间,也便于程序设计,适合在外延时间长的预报中应用。

最后指出,控制迭代终止的误差量级太大,可以使得稳定的差分格式预报出不稳定的结果,在预报图中出现小扰动波。控制的方法应以计算简便和具有误差代表性为宜;看来,以平均误差或均方差方法比较适当。误差量级大小的选择,应考虑到气象要素(如风、气压等)的观测数据的精确度、格网大小、差分格式的截断误差量级及机器表示的字长(一单元存放一数或若干个数据)等条件。比如用平衡方程确定流函数,可以在不使计算风速初始值的误差不大于 2 米/秒条件下,来确定控制迭代终止误差的量级。在比较精确度时,常以差分方程的数值解和微分(或差分)方程真解的近似程度,作为精确度的标准,这时需要考虑差分格式的截断误差量级,以及截断误差大小等因素,否则只追求差分方程的数值解的精确度高,把控制误差选择得很小,实际上毫无意义。

### 参 考 文 献

- [1] 王宗皓,气象学报, 32 (1962), № 3, 240—254.
- [2] Кибель, И. А., 短期天气预报的流体力学方法引论(中译本),科学出版社, 1959年, 224—230.
- [3] 朱永祺,动力气象论文集(二),科学出版社, 1963年, 112—114.
- [4] Birkhoff, G., Varga, R. S., Young, D., Advance in Computers, Vol 3.
- [5] Wachspress, E. L. Habetler, G. J., 电子计算机动态, 1961年,第8期.
- [6] 马尔丘克,核反应堆的数值算法,科学出版社, 1958年, § 36.
- [7] 叶笃正等,北半球冬季阻塞形势的研究,科学出版社, 1962年, 102—105.