

## 东风扰动的动力不稳定性\*

楊大升

(北京大学地球物理系)

### 提 要

本文用二层模式根据中低纬流场特点和科利奥里参数随纬度改变的性质得出东风扰动的波长较短,约 2400 公里。

### 一、引 言

中纬度的西风波动很明显,对这种现象的理论研究最早有 C. G. 罗斯贝的行星波理论<sup>[1]</sup>,后来有 J. G. 恰尼<sup>[2]</sup>和郭晓嵐<sup>[3]</sup>等的斜压和正压不稳定理论。在低纬度副热带高压南边经常可以见到有东风扰动发生,而且这种扰动和台风的形成也有一定的关系<sup>[4,5]</sup>,但是直到现在对这种东风扰动的比较完整的理论研究还几乎没有见到,本文试图对这种现象予以流体动力学的理论解释。

### 二、方程组的建立

常用的大气运动方程组是否也适用于低纬度呢?这个问题至今还没有解决<sup>[6]</sup>。因为到了低纬度通常在运动方程中略去的两项科氏力分量  $2\omega w \cos \varphi$  和  $2\omega u \cos \varphi$  可能就相对地变得重要了。为了估计这两项的重要性,我们可以比较一下  $\sin \varphi$  和  $\cos \varphi$  在低纬度的改变情况,结果见下表。可以看出,到纬度  $10^\circ$  两者之差还不到一个数量级,只有 5.7

$\varphi$	$30^\circ$	$25^\circ$	$20^\circ$	$15^\circ$	$10^\circ$	$5^\circ$
$\sin \varphi$	0.500	0.423	0.342	0.259	0.174	0.087
$\cos \varphi$	0.866	0.906	0.940	0.966	0.985	0.996

倍;到纬度  $5^\circ$  两者之差达一个数量级。因此要使  $2\omega w \cos \varphi$  和其它科氏力分量有相同大小,那么一直到纬度  $5^\circ$ , 铅直速度  $w$  最多只能比风速南北分量  $v$  小一个数量级。但是实际上,在低纬度铅直速度并没有显著增大,而风速的经向分量由于小系统很多却可以较大,因此即使在低纬度第一标量运动方程中的  $2\omega w \cos \varphi$  和  $2\omega v \sin \varphi$  相比照样可以略去。 $2\omega u \cos \varphi$  出现在包含重力加速度  $g$  的第三标量运动方程中,因此即使令  $\cos \varphi = 1$ , 这一项和  $g$  相比也可以略去,故得以下的对于低纬度的大气运动的方程组(假定绝热过程):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \tau \frac{\partial u}{\partial p} = - \frac{\partial \phi}{\partial x} + l v, \quad (1)$$

\* 本文 1964 年 3 月 13 日收到。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \tau \frac{\partial v}{\partial p} = - \frac{\partial \phi}{\partial y} - l u, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial p} = - \frac{RT}{p}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \tau}{\partial p} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{p}{R} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial p} + \frac{p}{R} u \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial x} + \frac{p}{R} v \frac{\partial^2 \phi}{\partial p \partial y} - \Gamma_1 \tau = 0, \quad (5)$$

以上各式即  $x, y, p, t$  自变量系统中的运动方程, 連續方程和絕热方程。其中  $u, v$  分别表示东西和南北方向的风速分量;  $\tau = \frac{dp}{dt}$  相当于鉛直速度;  $\phi$  表重力位势;  $\Gamma_1 = T \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$ ,  $T$  即绝对温度,  $\theta$  表示位温;  $R$  表单位质量空气的气体常数;  $l = 2\omega \sin \varphi$  即科利奥里参数。

### 三、两层模式

通常认为地轉风关系在低緯度不太适用, 同时一般对低緯度流場都进行流綫分析, 因此本文引入流函数  $\psi$  和势函数  $\chi$ , 而

$$u = - \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad (7)$$

其中以用流函数  $\psi$  表示的流綫运动部分为主。

由运动方程 (1), (2) 略去鉛直速度的水平分布和风速的鉛直变化的作用, 并用近似关系  $u \approx - \frac{\partial \psi}{\partial y}$ ,  $v \approx \frac{\partial \psi}{\partial x}$ , 則得以下的涡度方程,

$$\frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = l \frac{\partial \tau}{\partial p}, \quad (8)$$

其中  $\nabla^2$  表等压面上的二維拉普拉斯算子,  $\beta = \frac{dl}{dy}$ 。

同时在絕热方程中引入近似关系  $\frac{\partial \phi}{\partial p} = l \frac{\partial \psi}{\partial p}$ <sup>[7]</sup>, 則得

$$\frac{l}{R\Gamma_1} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial p} - \frac{l}{R\Gamma_1} \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial p \partial x} + \frac{1}{R\Gamma_1} \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left( l \frac{\partial \psi}{\partial p} \right) = \frac{\tau}{p}. \quad (9)$$

把整个大气分成四层, 用 0, 1, 2, 3, 4 分别表示大气上界、250 毫巴、500 毫巴、750 毫巴和 1000 毫巴等各等压面。把 (8) 式分别写于 250 毫巴和 750 毫巴二等压面, 同时把 (9) 式写于 500 毫巴等压面, 然后消去  $\tau_2$ , 則得

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_1}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi_1}{\partial y} + \beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = \\ & = \frac{l^2 \theta_2}{RT_2(\theta_3 - \theta_1)} \left( \frac{\partial \psi_3}{\partial t} - \frac{\partial \psi_1}{\partial t} \right) - \end{aligned}$$

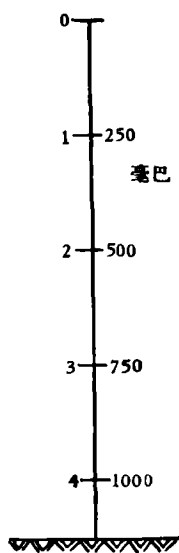


图1 两层模式的大气分层

$$-\frac{l^2\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}+\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)+\frac{l\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right) \cdot \left[l\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)+\beta(\psi_3-\psi_1)\right], \quad (10)$$

$$\frac{\partial\nabla^2\psi_3}{\partial t}-\frac{\partial\psi_3}{\partial y}\frac{\partial\nabla^2\psi_3}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\frac{\partial\nabla^2\psi_3}{\partial y}+\beta\frac{\partial\psi_3}{\partial x}=-\frac{l^2\theta_2}{RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial t}-\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)+\frac{l\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y}+\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)-\frac{l\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x}\right) \cdot \left[l\left(\frac{\partial\psi_3}{\partial y}-\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)+\beta(\psi_3-\psi_1)\right], \quad (11)$$

在得到以上两式时用了 $\psi_2 = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_3)$ 的关系。

#### 四、东风扰动的稳定度

用小扰动法将(10)和(11)式线性化。根据实际经验,低纬度流场一般较弱,而且低层比较有明显的基本气流,高层流层则较复杂<sup>[8]</sup>,因此在线性化时取高层的基本流场为零,而令低层750毫巴等压面上基本流场的流函数为 $\bar{\psi}_3(y)$ ,故

$$\psi_1(x, y, t) = \psi'_1(x, y, t), \quad \psi_3(x, y, t) = \bar{\psi}_3(y) + \psi'_3(x, y, t),$$

代入(10),(11)式,则得线性化以后的方程为

$$\frac{\partial\nabla^2\psi'_1}{\partial t} + \beta\frac{\partial\psi'_1}{\partial x} = \frac{l^2\theta_2}{RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi'_3}{\partial t}-\frac{\partial\psi'_1}{\partial t}\right) - \frac{l^2\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\frac{d\bar{\psi}_3}{dy}\left(\frac{\partial\psi'_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi'_1}{\partial x}\right) + \frac{l\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi'_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi'_3}{\partial x}\right)\left(l\frac{d\bar{\psi}_3}{dy}+\beta\bar{\psi}_3\right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial\nabla^2\psi'_3}{\partial t} - \frac{d\bar{\psi}_3}{dy}\frac{\partial\nabla^2\psi'_3}{\partial x} + \frac{d\nabla^2\bar{\psi}_3}{dy}\frac{\partial\psi'_3}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi'_3}{\partial x} = -\frac{l^2\theta_2}{RT_2(\theta_3-\theta_1)}\left(\frac{\partial\psi'_3}{\partial t}-\frac{\partial\psi'_1}{\partial t}\right) + \frac{l^2\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\frac{d\bar{\psi}_3}{dy}\left(\frac{\partial\psi'_3}{\partial x}-\frac{\partial\psi'_1}{\partial x}\right) - \frac{l\theta_2}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)} \cdot \left(\frac{\partial\psi'_1}{\partial x}+\frac{\partial\psi'_3}{\partial x}\right)\left(l\frac{d\bar{\psi}_3}{dy}+\beta\bar{\psi}_3\right). \quad (13)$$

令

$$(\psi'_1(x, y, t), \psi'_3(x, y, t)) = (\Psi_1(y), \Psi_2(y))e^{ik(x-ct)},$$

其中 $K$ 为波数, $c$ 为波速,代入(12)和(13)式,则得

$$-c\frac{d^2\Psi_1}{dy^2} + \left[\beta + k^2c - \frac{l\theta_2}{RT_2(\theta_3-\theta_1)} - \frac{l^2\theta_2}{RT_2(\theta_3-\theta_1)}\frac{d\bar{\psi}_3}{dy} - \frac{l\beta\theta_2\bar{\psi}_3}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\right]\Psi_1 = -\left[\frac{l^2\theta_2c}{RT_2(\theta_3-\theta_1)} - \frac{l\beta\theta_2\bar{\psi}_3}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\right]\Psi_3; \quad (14)$$

$$-\left(c + \frac{d\bar{\psi}_3}{dy}\right)\frac{d^2\Psi_3}{dy^2} + \left[\beta + k^2c + k^2\frac{d\bar{\psi}_3}{dy} + \frac{d^2\bar{\psi}_3}{dy^2} - \frac{l^2\theta_2c}{RT_2(\theta_3-\theta_1)} + \frac{l\beta\theta_2\bar{\psi}_3}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\right]\Psi_3 = -\left[\frac{l^2\theta_2c}{RT_2(\theta_3-\theta_1)} + \frac{l^2\theta_2}{RT_2(\theta_3-\theta_1)}\frac{d\bar{\psi}_3}{dy} + \frac{l\beta\theta_2\bar{\psi}_3}{2RT_2(\theta_3-\theta_1)}\right]\Psi_1. \quad (15)$$

低緯东风气流分布于較窄的緯度带,故必須考虑基本东风随緯度的改变,我們取以下的拋物綫分布逼近东风气流,即取

$$\bar{u}_3 = -\frac{d\bar{\psi}_3}{dy} = E_0(y^2 - y_1^2).$$

上式中  $E_0 > 0$ , 当  $y = y_1$ , 即副热带高压脊綫处,  $\bar{u}_3 = 0$ , 当  $y = 0$ , 东风达最大强度, 由上式故

$$\bar{\psi}_3 = E_0 y \left( y_1^2 - \frac{1}{3} y^2 \right).$$

在低緯度  $\beta = \frac{dl}{dy} = \frac{2\omega \cos \varphi}{a}$  可取为常值; 但  $l$  随緯度的变化必須考虑, 因东风带的緯度范围不大, 故取  $l$  随  $y$  的变化为以下的綫性关系

$$l = l_0 + \beta y,$$

把以上关系代入(14)和(15)式, 并令

$$\Gamma = \frac{\theta_2}{RT_2(\theta_3 - \theta_1)}; \alpha_1 = \Gamma E_0 l_0^2 y_1^2; \alpha_2 = \Gamma \beta^2; \alpha_3 = \Gamma \beta l_0.$$

則得,

$$\begin{aligned} c \frac{d^2 \Psi_1}{dy^2} - \left[ \beta + k^2 c - \Gamma c l_0^2 - \alpha_1 - \alpha_3 \left( 2c + \frac{5}{2} E_0 y_1^2 \right) y - \left( \alpha_2 c + \frac{3}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \Gamma E_0 l_0^2 \right) y^2 + \frac{13}{6} \alpha_3 E_0 y^3 + \frac{7}{6} \alpha_2 E_0 y^4 \right] \Psi_1 = \left[ \Gamma c l_0^2 + \alpha_3 \left( 2c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) y + \right. \\ \left. + \alpha_2 \left( c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) y^2 + \frac{1}{6} \alpha_3 E_0 y^3 + \frac{1}{6} \alpha_2 E_0 y^4 \right] \Psi_3. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} (E_0 y^2 - c - E_0 y_1^2) \frac{d^2 \Psi_3}{dy^2} + \left[ \beta + k^2 c + k^2 E_0 y_1^2 - 2E_0 - \Gamma c l_0^2 + \alpha_3 \left( \frac{E_0}{2} y_1^2 - 2c \right) y + \right. \\ \left. + \left( \frac{1}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 - k^2 E_0 - \alpha_2 c \right) y^2 - \frac{1}{6} \alpha_3 E_0 y^3 - \frac{1}{6} \alpha_2 E_0 y^4 \right] \Psi_3 = - \\ - \left[ \Gamma c l_0^2 + \alpha_1 + \alpha_3 \left( 2c + \frac{5}{2} E_0 y_1^2 \right) y + \left( \alpha_2 c - \frac{\alpha_1}{y_1^2} + \frac{3}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 \right) y^2 - \right. \\ \left. - \frac{13}{6} \alpha_3 E_0 y^3 - \frac{7}{6} \alpha_2 E_0 y^4 \right] \Psi_1. \end{aligned} \quad (17)$$

$\Psi_1$  和  $\Psi_3$  的边界条件可如下求得: 因在北边东西风交界处,  $u = 0$ , 而由对基本东风的假定,  $\bar{u}_1 = 0$ , 当  $y = y_1$ ,  $\bar{u}_3 = 0$ , 故取当  $y = y_1$ ,  $u' = -\frac{\partial \psi'}{\partial y} = 0$ , 即

$$\frac{d\Psi_1}{dy} = \frac{d\Psi_3}{dy} = 0.$$

如果考虑副热带高压脊綫随高度的傾斜則可取, 当  $y = y_1$ ,  $\frac{d\Psi_3}{dy} = 0$ , 当  $y = y_2$ ,  $\frac{d\Psi_1}{dy} = 0$ , 本文为簡單起見略去了这种差别。

在极低緯度处根据实际分析結果,  $u'$  也极小<sup>[9]</sup>, 故取

当  $y = 0$ , 則  $\frac{d\Psi_1}{dy} = \frac{d\Psi_3}{dy} = 0$ .

显然以下的富氏级数为适合上面的边条件的(16)和(17)式的解答,

$$\Psi_1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi \frac{y}{y_1}, \quad \Psi_3 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos n\pi \frac{y}{y_1},$$

把以上解答代入(16)和(17)式则得

$$\begin{aligned} & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ c a_n \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 + (\beta + k^2 c - \Gamma c l_0^2 - \alpha_1) a_n + \Gamma c l_0^2 b_n \right] \cos \frac{n\pi}{y_1} y + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \alpha_3 \left( 2c + \frac{5}{2} E_0 y_1^2 \right) a_n - \alpha_3 \left( 2c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) b_n \right] y \cos \frac{n\pi}{y_1} y + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left[ \alpha_2 \left( c + \frac{3}{2} E_0 y_1^2 \right) - \Gamma E_0 l_0^2 \right] a_n - \alpha_2 \left( c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) b_n \right\} y^2 \cos \frac{n\pi}{y_1} y - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \alpha_3 E_0 (13a_n + b_n) y^3 \cos \frac{n\pi}{y_1} y - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6} \alpha_2 E_0 (7a_n + b_n) \cdot y^4 \cos \frac{n\pi}{y_1} y = 0, \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( c + E_0 y_1^2 \right) \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 b_n + (\beta + k^2 c + k^2 E_0 y_1^2 - 2E_0 - \Gamma c l_0^2) b_n + \right. \\ & + \left. (\Gamma c l_0^2 + \alpha_1) a_n \right] \cos \frac{n\pi}{y_1} y + \alpha_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{E_0}{2} y_1^2 - 2c \right) b_n + \left( \frac{5}{2} E_0 y_1^2 + \right. \right. \\ & + \left. \left. 2c \right) a_n \right] y \cos \frac{n\pi}{y_1} y + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{1}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 - E_0 \left( \frac{n\pi}{y_1} \right)^2 - \alpha_2 c - k^2 E_0 \right) b_n + \right. \\ & + \left. \left( \alpha_2 c - \frac{\alpha_1}{y_1^2} + \frac{3}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 \right) a_n \right] y^2 \cos \frac{n\pi}{y_1} y - \frac{1}{6} \alpha_3 E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 13a_n) \cdot \\ & \cdot y^3 \cos \frac{n\pi}{y_1} y - \frac{1}{6} \alpha_2 E_0 \sum_{n=1}^{\infty} (b_n + 7a_n) y^4 \cos \frac{n\pi}{y_1} y = 0. \quad (19) \end{aligned}$$

代入以下关系,

$$y \cos \frac{n\pi}{y_1} y = \sum_{m=0}^{\infty} e_{m,n} \cos \frac{m\pi}{y_1} y, \quad (20)$$

其中当  $m = n$ ,

$$e_{m,n} = \frac{1}{2} y_1,$$

当  $m \pm n = \text{偶数}$ ,

$$e_{m,n} = 0,$$

当  $m \pm n = \text{奇数}$ ,

$$e_{m,n} = -\frac{4(n^2 + m^2)y_1}{(n^2 - m^2)^2 \pi^2},$$

$$y^2 \cos \frac{n\pi}{y_1} y = \sum_{m=0}^{\infty} d_{m,n} \cos \frac{m\pi}{y_1} y, \quad (21)$$

其中当  $m = n$ ,

$$d_{m,n} = y_1^2 \left[ \frac{1}{3} + \frac{1}{2(n\pi)^2} \right],$$

当  $m \pm n = \text{偶数}$ ,

$$d_{m,n} = \frac{2y_1^2}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(m+n)^2} - \frac{1}{(m-n)^2} \right],$$

当  $m \pm n = \text{奇数}$ ,

$$d_{m,n} = -\frac{2y_1^2}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(m+n)^2} - \frac{1}{(m-n)^2} \right].$$

$$y^3 \cos \frac{n\pi}{y_1} y = \sum_{m=0}^{\infty} b_{m,n} \cos \frac{m\pi}{y_1} y, \quad (22)$$

其中当  $m = n$ ,

$$b_{m,n} = \frac{y_1^3}{4} \left( 1 + \frac{3}{n^2 \pi^2} \right),$$

当  $m \pm n = \text{偶数}$ ,

$$b_{m,n} = \frac{6y_1^3}{\pi^2} \frac{m^2 + n^2}{(n^2 - m^2)^2},$$

当  $m \pm n = \text{奇数}$ ,

$$b_{m,n} = \frac{3y_1^3}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{(n+m)^2} \left[ \frac{4}{\pi^2(n+m)^2} - 1 \right] + \frac{1}{(n-m)^2} \left[ \frac{4}{\pi^2(n-m)^2} - 1 \right] \right\}.$$

$$y^4 \cos \frac{n\pi}{y_1} y = \sum_{m=0}^{\infty} f_{m,n} \cos \frac{m\pi}{y_1} y, \quad (23)$$

其中当  $m = n$ ,

$$f_{m,n} = y_1^4 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{n^2 \pi^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{n^4 \pi^4} \right),$$

当  $m \pm n = \text{偶数}$ ,

$$f_{m,n} = \frac{4y_1^4}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{(m+n)^2} + \frac{1}{(m-n)^2} - \frac{6}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(n-m)^4} \right] \right\},$$

当  $m \pm n = \text{奇数}$ ,

$$f_{m,n} = -\frac{4y_1^4}{\pi^2} \left\{ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} - \frac{6}{\pi^2} \left[ \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(n-m)^4} \right] \right\}.$$

按  $\cos \frac{m\pi}{y_1} y$  组合则得,

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ \alpha_1 + \Gamma c l_0^2 - c m^2 \left( \frac{\pi}{y_1} \right)^2 - \beta - k^2 c \right] a_m - \Gamma c l_0^2 b_m + \right. \\ & + \frac{1}{2} \alpha_3 y_1 \left[ \left( 2c + \frac{5}{2} E_0 y_1^2 \right) a_m - \left( 2c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) b_m \right] - \\ & - \frac{4\alpha_3 y_1}{\pi^2} \left[ \left( 2c + \frac{5}{2} E_0 y_1^2 \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} a_n - \left( 2c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} b_n \right] \frac{n^2 + m^2}{(n^2 - m^2)^2} + \\ & + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m^2 \pi^2} \right) \alpha_2 y_1^2 \left[ \left( c + \frac{3}{2} E_0 y_1^2 - \Gamma E_0 l_0^2 \right) a_m - \left( c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) b_m \right] + \\ & + \frac{2\alpha_2 y_1^2}{\pi^2} \left[ \left( \frac{3}{2} E_0 y_1^2 + c - \Gamma E_0 l_0^2 \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} a_n - \right. \\ & - \left. \left( c - \frac{1}{2} E_0 y_1^2 \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} b_n \right] \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} \right] - \\ & - \frac{2\alpha_2 y_1^2}{\pi^2} \left[ \left( \frac{3}{2} E_0 y_1^2 - \Gamma E_0 l_0^2 + c \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} a_n + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{1}{2} E_0 y_1^2 - c \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} b_n \left[ \frac{1}{(n+m)^2} - \frac{1}{(n-m)^2} \right] - \\
& - \frac{\alpha_3 E_0}{24} y_1^3 (b_m + 13 a_m) \left( 1 + \frac{3}{m^2 \pi^2} \right) - \frac{\alpha_3 E_0 y_1^3}{\pi^2} \left( \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} b_n + \right. \\
& + 13 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} a_n \left. \right) \frac{n^2 + m^2}{(n^2 - m^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{\alpha_3 E_0 y_1^3}{\pi^2} \left( \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} b_n + \right. \\
& + 13 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} a_n \left. \right) \left[ \frac{1}{(n+m)^2} \left( \frac{4}{\pi^2 (n+m)^2} - 1 \right) + \frac{1}{(n-m)^2} \left( \frac{4}{\pi^2 (n-m)^2} - 1 \right) \right] - \\
& - \frac{1}{6} \alpha_2 E_0 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{m^2 \pi^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{m^4 \pi^4} \right) (b_m + 7 a_m) y_1^4 - \frac{2}{3} \frac{\alpha_2 E_0}{\pi^2} y_1^4 \left( \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} b_n + \right. \\
& + 7 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} a_n \left. \right) \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} - \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(n-m)^4} \right) \right] + \\
& + \frac{2}{3} \frac{\alpha_2 E_0 y_1^4}{\pi^2} \left( \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} b_n + 7 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} a_n \right) \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} - \right. \\
& \left. - \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(n-m)^4} \right) \right] \left. \right\} \cos \frac{m\pi}{y_1} y = 0; \tag{24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[ (E_0 y_1^2 + c) \left( \frac{\pi}{y_1} \right)^2 m^2 + \beta + k^2 c + k^2 E_0 y_1^2 - 2E_0 - \Gamma c l_0^2 - \alpha_3 y_1 c + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{4} \alpha_3 E_0 y_1^3 \right] b_m + \left( \alpha_1 + \Gamma c l_0^2 + \alpha_3 c y_1 + \frac{5}{4} \alpha_3 E_0 y_1^3 \right) a_m - \\
& - \frac{4\alpha_3 y_1}{\pi^2} \left[ \left( \frac{E_0}{2} y_1^2 - 2c \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} \frac{n^2 + m^2}{(n^2 - m^2)^2} b_n + \left( 2c + \frac{5}{2} E_0 y_1^2 \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} \frac{n^2 + m^2}{(n^2 - m^2)^2} a_n \right] + \\
& + \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2m^2 \pi^2} \right) y_1^2 \left[ \left( \frac{1}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 - \alpha_2 c - E_0 \left( \frac{\pi}{y_1} \right)^2 m^2 - E_0 k^2 \right) b_m + \right. \\
& + \left. \left( \alpha_2 c - \frac{\alpha_1}{y_1^2} + \frac{3}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 \right) a_m \right] + \frac{2y_1^2}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 - \alpha_2 c - E_0 k^2 \right) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} b_n + \left( \frac{3}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 + \alpha_2 c - \frac{\alpha_1}{y_1^2} \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} a_n \left. \right] \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} \right] - \\
& - 2E_0 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} n^2 \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} \right] b_n - \frac{2y_1^2}{\pi^2} \left[ \left( \frac{1}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 - \alpha_2 c - E_0 k^2 \right) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} b_n + \left( \alpha_2 c - \frac{\alpha_1}{y_1^2} + \frac{3}{2} \alpha_2 E_0 y_1^2 \right) \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} a_n \left. \right] \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} \right] + \\
& + 2E_0 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} n^2 \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} \right] b_n - \frac{1}{24} \alpha_3 E_0 y_1^3 \left( 1 + \frac{3}{m^2 \pi^2} \right) (b_m + 13 a_m) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\alpha_3 E_0 \frac{y_1^3}{\pi^2} \left( \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} b_n + 13 \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} a_n \right) \frac{m^2 + n^2}{(m^2 - n^2)^2} - \frac{1}{2} \alpha_3 E_0 \frac{y_1^3}{\pi^2} \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} (b_n + 13a_n) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{1}{(n+m)^2} \left( \frac{4}{\pi^2(n+m)^2} - 1 \right) + \frac{1}{(n-m)^2} \left( \frac{4}{\pi^2(n-m)^2} - 1 \right) \right] - \\
& - \frac{1}{6} \alpha_2 E_0 \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{m^2 \pi^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{m^4 \pi^4} \right) y_1^4 (b_m + 7a_m) - \\
& - \frac{2}{3} \alpha_2 E_0 \frac{y_1^4}{\pi^2} \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{偶数}} (b_n + 7a_n) \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(n-m)^2} - \right. \\
& - \left. \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(n-m)^4} \right) \right] + \frac{2}{3} \frac{\alpha_2 E_0 y_1^4}{\pi^2} \sum_{n \neq m}^{n+m=\text{奇数}} (b_n + 7a_n) \left[ \frac{1}{(n+m)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{1}{(n-m)^2} - \frac{6}{\pi^2} \left( \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(n-m)^4} \right) \right] \left. \right\} \cos \frac{m\pi}{y_1} y = 0. \quad (25)
\end{aligned}$$

由此,故(24)和(25)式中对于任意  $m$  值的  $\cos \frac{m\pi}{y_1} y$  前面的系数必须等于零,这样可得决定  $a_1, a_2, \dots, a_m, \dots, b_1, b_2, \dots, b_m \dots$  的代数方程组,由此代数方程组求解波速  $c$  的本征值问题便得东风扰动的稳定度。

### 五、计算举例

由于(24)和(25)式中每一项的系数非常复杂,因此要在比较一般的情形下求解  $C$  的本征值问题还很困难,下面我们只用上式作一粗略的计算。假定  $\Psi_1$  和  $\Psi_3$  的富氏级数解截断到分别只有  $a_1, a_2$  和  $b_1, b_2$  两项。由此,利用(24)和(25)式,分别令其中的  $m=1$  和  $m=2$  则得四个对于  $a_1, a_2, b_1$  和  $b_2$  的齐次代数方程组,这一代数方程组有非零解的条件为其系数的行列式等于零。考虑夏季情形,根据 H. 里耳<sup>[4]</sup>,以上各式中所包含的表征大气状态的各项参数具以下数值:

$$\begin{aligned}
\theta_1 &= 345^\circ\text{K}, & \theta_3 &= 310^\circ\text{K}, \\
\theta_2 &= 327^\circ\text{K}, & T_2 &= 266^\circ\text{K}.
\end{aligned}$$

由此故

$$\theta_3 - \theta_1 = -35^\circ, \quad \Gamma = -1.223 \times 10^{-4} \text{秒}^2/\text{米}^2.$$

假定东风扰动限于  $10^\circ-35^\circ\text{N}$  之间,在  $10^\circ\text{N}$  东风强度达最大值, 8 米/秒<sup>[4,10]</sup>, 由此则

$$\begin{aligned}
y_1 &= 2.77842 \times 10^6 \text{米}, \\
E_0 &= 1.03632 \times 10^{-12} \text{米}^{-1} \text{秒}^{-1}, \\
l_0 &= 2.53692 \times 10^{-5} \text{秒}^{-1}, \\
\beta &= 2.09760 \times 10^{-11} \text{米}^{-1} \text{秒}^{-1} \text{(对于 } 23^\circ \text{ 纬度)}, \\
\alpha_1 &= -6.29694 \times 10^{-13}, \\
\alpha_2 &= -5.38112 \times 10^{-26}, \\
\alpha_3 &= -6.50813 \times 10^{-20}.
\end{aligned}$$

利用这些数值则得  $a_1, a_2, b_1$  和  $b_2$  有非零解的条件为



$$\begin{vmatrix}
 -(k^2+1.69753 \times 10^{-12})c-2.32487 \times 10^{-11} & 4.19008 \times 10^{-12}c-7.77911 \times 10^{-12} \\
 1.72468 \times 10^{-12}c+4.90042 \times 10^{-12} & -1.72468 \times 10^{-12}c+3.6992 \times 10^{-12} \\
 -4.19008 \times 10^{-12}c-1.98785 \times 10^{-12} & (k^2+1.69753 \times 10^{-12})c+4.928k^2+2.4426 \times 10^{-11} \\
 1.72468 \times 10^{-12}c+3.62598 \times 10^{-12} & -1.72468 \times 10^{-12}c+1.78964k^2+2.70165 \times 10^{-12} \\
 1.72468 \times 10^{-12}c+4.90042 \times 10^{-12} & -1.72468 \times 10^{-12}c+3.6992 \times 10^{-12} \\
 -(k^2+5.51731 \times 10^{-12})c-2.34627 \times 10^{-11} & 4.03227 \times 10^{-12}c-7.60053 \times 10^{-12} \\
 1.72468 \times 10^{-12}c+3.62598 \times 10^{-12} & -1.72468 \times 10^{-12}c+1.78964k^2+9.6968 \times 10^{-12} \\
 -4.03227 \times 10^{-12}c-2.24005 \times 10^{-12} & (k^2+5.51731 \times 10^{-12})c+4.49001 \times 10^{-11}+5.232k^2
 \end{vmatrix} = 0, \quad (26)$$

上面的行列式展开之后, 则得

$$A(k)c^4 + B(k)c^3 + D(k)c^2 + F(k)c + G(k) = 0, \quad (27)$$

其中  $A(k), B(k), D(k), F(k)$  和  $G(k)$  分别都是  $k$  的函数,

$$A(k) = k^8 + 7.21483 \times 10^{-12}k^6 + 8.60273 \times 10^{-23}k^4 + 4.72866 \times 10^{-36}k^2 + 7.78352 \times 10^{-47},$$

$$B(k) = 10.160k^8 + 2.25892 \times 10^{-10}k^6 + 4.40286 \times 10^{-21}k^4 + 4.127 \times 10^{-33}k^2 + 3.55963 \times 10^{-45},$$

$$D(k) = 23.9937k^8 + 8.88451 \times 10^{-10}k^6 + 1.09127 \times 10^{-20}k^4 + 3.33521 \times 10^{-33}k^2 + 2.48371 \times 10^{-44},$$

$$F(k) = 1.05477 \times 10^{-9}k^6 + 2.46220 \times 10^{-20}k^4 + 1.63153 \times 10^{-31}k^2 + 2.95452 \times 10^{-43},$$

$$G(k) = 1.23117 \times 10^{-20}k^4 + 1.78578 \times 10^{-31}k^2 + 5.86815 \times 10^{-43}.$$

根据(27)式对 1000 到 3142 公里波长间的波速进行了计算, 令  $c = c_r + ic_i$ , 则  $c_r$  即东风扰动的传播速度, 而  $kc_i$  即扰动随时间增长的发展率, 所得结果如图 2 所示. 由图上可以看出: 不稳定波长趋向于短波部分, 最不稳定波长约 2400 公里左右, 当波长超过 2500 公里, 发展率即迅速减小, 这 and 低纬度东风波的观测事实一致<sup>[4]</sup>. 图上的东风波速在 2500 公里波长附近最大, 达 -5.4 米/秒. 根据波长和波速可以计算东风扰动的周期, 结果见下表,

波长 (公里)	1000	1500	2000	2470	2800	3142
周期 (天)	4.1	4.9	5.2	5.3	6.5	7.9

最不稳定波的周期约为 5 天, 这个结果可以和 S. L. 罗森塔耳<sup>[11]</sup> 对低纬大尺度扰动的幂谱分析的结果相比较. 根据他对关岛 (13.6°N, 144.9°E)、威克岛 (19.3°N, 166.6°E) 和马尔丘斯 (24.3°N, 153.0°E) 等站测风的谱分析, 南风分量中的最优周期如下表. 槽脊前后的南风分量差别最显著, 故南风分量中的最优周期应和东风扰动中最不稳定波的周期相当, 由表可见,

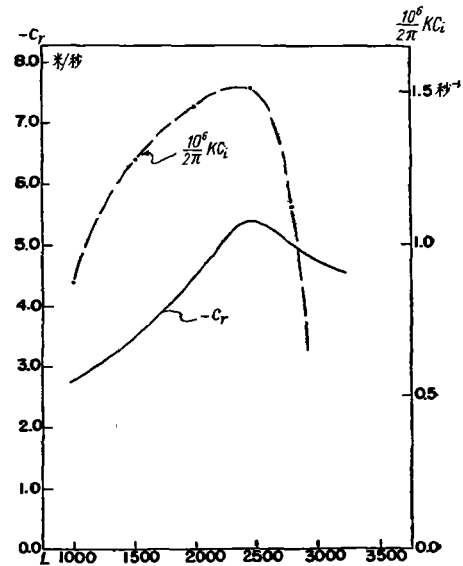


图 2 波速 ( $-c_r$ ) 以及发展率 ( $\frac{10^6}{2\pi} kc_i$ ) 和波长 ( $L$ ) 的关系

站 别		关 岛	威 克 岛	马 尔 丘 斯
最优周期	200 毫巴	6	9	14
(天)	850 毫巴	5.6	4 左右	12

理論計算的 5 天左右的最不穩定波的周期和关島的分析結果几乎完全一致，和威克島的結果大致相合；和馬尔丘斯則相差較大。把我們計算時所用的东风廓綫(图 3)和这些站 5000 呎高度上的平均东风相比較，埃尼威托克(-8.8 米/秒)关島(-8.5 米/秒)和威克島(-7.1 米/秒)等站的平均东风和图 3 上相当緯度的东风风速很相近；而馬尔丘斯的 -1.8 米/秒的平均东风和图 3 上相当緯度的 -5.2 米/秒的东风风速則有較大差別，因此理論計算時所設的东风廓綫对埃尼威托克、关島和威克島都是合适的；但对馬尔丘斯則不合适，这可能就是馬尔丘斯和其它站最优周期有較大差別的原因。

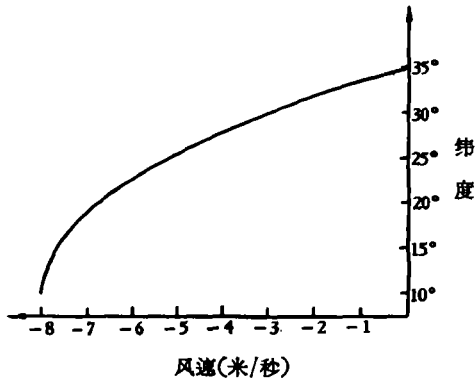


图 3 东风随緯度的分布

在計算時虽然考虑了基本东风随緯度的改变，但图 3 的东风廓綫不滿足郭晓嵐<sup>[3]</sup>等所得的正压不穩定条件(在 10°—35°N 間，在某些緯度，至少在一个緯度， $\frac{d^2\bar{u}}{dy^2} - \beta = 0$ )，因此上面算得的 1000 到 3000 公里波长間的不穩定性主要是由于考虑东风气流随高度改变的大气的斜压性和两层模式中所包含的水平速度辐散的作用。而由連續方程  $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial r}{\partial p}$ ，故要准确地考虑速度辐散也必須求解三維問題，因此速度辐散和大气的斜压性也有密切关联。关于速度辐散对扰动不穩定性的作用，G. J. 哈尔蒂勒和 R. T. 宋<sup>[12]</sup>在其研究正压不穩定性的工作中已經有較詳細的計算。

在計算時，只分別取了  $\Psi_1$  和  $\Psi_3$  的富氏級数解的前兩項，項数取得多一些，根据 G. J. 哈尔蒂勒和 R. T. 宋<sup>[11]</sup>的比較研究，是会改变所得結果的具体数值的；但并不改变所得結果的主要性質。不过須要指出，如只取  $\Psi_1$  和  $\Psi_3$  的第一項进行計算，則对所有波长扰动都是穩定的，因此这些富氏級数中的第一項并不是解答的最主要的一項。

在計算(24)，(25)式中  $a_1$ ， $a_2$ ， $b_1$  和  $b_2$  前面的系数时发现其中的  $\beta$  的数值最大，一般比系数中其它各項大一个数量級，甚至更多，由此似乎可以得出結論：C. G. 罗斯貝最初所提出的行星波理論在考虑相对涡度和地轉涡度的补偿变化导致行星波的产生这一点上似乎更代表低緯度的特点。

致謝：承謝义炳教授建议这项工作，在工作过程中并得到他的鼓励和帮助；承陈受钧同志提供宝贵的意見；并承萧文俊同志协助制图，黄荣輝、刘延英等同志协助完成大量的計算工作，作者一并致衷心的感謝。

## 参 考 文 献

- [1] Rossby, C. G. and collaborators, Relation between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the Semi-permanent Centers of Action, *J. Marine Res.* **2**, (1939), 38—55.
- [2] Charney, J. G., The Dynamics of Long Waves in a Baroclinic Westerly Current, *J. Meteor.* **4**, (1947), 135—162.
- [3] Kuo, H. L., Dynamic Instability of two Dimensional Non-divergent Flow in a Barotropic Atmosphere, *J. Meteor.* **6**, (1949), 105—122.
- [4] Riehl, H. L., *Tropical Meteorology*, 1958.
- [5] 谢义炳等, 东南亚基本气流与台风发生的一些事实的统计与分析, *气象学报*, **33** (1963), 206—217.
- [6] 谢义炳等, 赤道辐合带上波动不稳定性的简单理论分析, *气象学报*, **34** (1964), 198—210.
- [7] Kuo, H. L., On Quasi-nondivergent Prognostic Equations and their Integrations, *M. I. T. Scientific Report*, No. **2**, 1955.
- [8] Heastie, H., and Stephenson, P. M., Upper Winds over the World, Parts I and II, *Geophysical Memoirs*, No. **103**, 1960.
- [9] Rosenthal, S. L., A Simplified Linear Theory of Equatorial Easterly Waves, *J. Meteor.* **17**, (1960), 484—488.
- [10] Rosenthal, S. L., Some Estimates of the Power Spectra of the Large Scale Disturbances in Low Latitudes, *J. Meteor.* **17** (1960), 259—263.
- [11] Haltiner, G. J., and Song, R. T., Dynamic Instability in Barotropic Flow, *Tellus*, **14**, (1962), 383—393.

## THE DYNAMIC INSTABILITY OF THE EASTERLY DISTURBANCES IN A TWO-LAYER MODEL

YANG TA-CENG

(Department of Geophysics, Peking University)

### ABSTRACT

Taking account of the characteristic feature of the wind field and the variation of the coriolis parameter with latitude in the temperate and low latitude, the dynamic instability of the easterly disturbances is investigated by means of a two-layer model. The result shows that the unstable wave is biased to shorter wave length and the most unstable wave length can be as short as 2400 km.