

超长波的不稳定与发展的一个初步研究*

叶笃正 王晓林
(中国科学院地球物理研究所) (北京大学地球物理系)

提 要

本文在绝热无摩擦的条件下,讨论了超长波的不稳定与发展。超长波不稳定的控制因子有静力稳定度的垂直差异及风的垂直切变。不稳定的出现要求高空静力稳定度要比低空大,平流层满足了这个要求。风的垂直切变愈大则愈不稳定。

使扰动场对基本场反馈,求出了基本场的垂直切变与静力稳定度的变化方程。发现,扰动对垂直切变的反馈作用很大,而对静力稳定度则很小。根据 $\frac{d}{dt}(P' + K') = 0$ (其中 P' 与 K' 分别是一个波长中的扰动位能和扰动动能)的条件,求出了扰动发展到极值的时间和振幅。所得扰动发展的时间和极大振幅与实况较为符合,同时扰动极大振幅对于初值振幅具有准保守性。

影响超长波发展的因子除了风的垂直切变与静力稳定度垂直分布的作用外,还有波长。波长的改变对最后所要达到的极大振幅没有影响,而只是波长愈长扰动发展天数愈长。平流层的作用使扰动的振幅低空变小,高空增大。

一、引 言

长波的不稳定及其发展是近年来动力气象中的一个重要研究对象。很多作者^[1-4]从各方面对这个问题做了许多工作,丰富了我们对长波扰动的知识。近年来,人们开始注意到超长波。在对流层各层等压面的月平均图上及平流层每天的天气图上都能看到这种波动。这种超长波与长波有许多迥然不同的性质,如它具有准定常的特性,围绕着一个平衡位置来回摆动^[9]。1961年 Wiin-Nielsen^[10] 利用由 Burger^[11] 所得出的超长波方程,对超长波的不稳定问题作了一些研究,由此看出超长波的动力性质也与长波不同。本文也将对超长波的动力性质进一步加以研究,并着重讨论大气静力稳定度的垂直分布对它不稳定的作用、超长波扰动发展到极值的时间和振幅以及控制这种发展的因子等。

二、模 式

Burger^[11] 得到关于超长波尺度的涡度方程的一级近似:

$$\beta v + fD = 0. \quad (1)$$

其中 $\beta = df/dy$ 近似地当作常数, f 为柯氏参数, D 为辐散。(1)式表示散度作用和 β 作用是准平衡的。

方程(1)和下面的绝热方程,连续方程和地转关系

* 本文1964年9月4日收到。

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) + \mathbf{V} \cdot \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right) + \sigma \omega = 0. \quad (2)$$

$$D + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0. \quad (3)$$

$$f v = \partial \varphi / \partial x, \quad f u = -\partial \varphi / \partial y. \quad (4)$$

构成了闭合方程组。这里 $\sigma = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}$ 为静力稳定度，其它符号与一般气象所常用的

的相同。

使用三层模式(如图 1)，并取边界条件为：

$$p = 0, \quad \omega = 0;$$

$$p = 1002 \text{ 毫巴}, \quad \omega = 0,$$

则有

$$\beta v_1 = \frac{f_0}{\Delta p} \omega_2, \quad (5)$$

$$\beta v_3 = \frac{f_0}{\Delta p} (\omega_4 - \omega_2), \quad (6)$$

$$\beta v_5 = -\frac{f_0}{\Delta p} \omega_4. \quad (7)$$

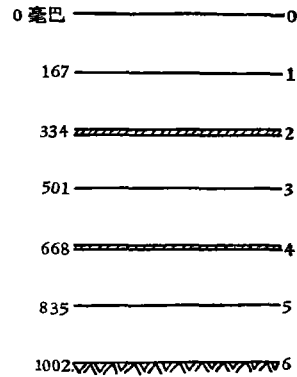


图 1 三层模式分层图

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 - \varphi_3) + \mathbf{V}_2 \cdot \nabla (\varphi_1 - \varphi_3) - \Delta p \sigma_2 \omega_2 = 0. \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_3 - \varphi_5) + \mathbf{V}_4 \cdot \nabla (\varphi_3 - \varphi_5) - \Delta p \sigma_4 \omega_4 = 0. \quad (9)$$

把(5)与(7)式分别代入(8)与(9)式可以得到：

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 - \varphi_3) + \mathbf{V}_2 \cdot \nabla (\varphi_1 - \varphi_3) - \frac{\beta}{q_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_3 - \varphi_5) + \mathbf{V}_4 \cdot \nabla (\varphi_3 - \varphi_5) + \frac{\beta}{q_4} \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

其中 $q_2 = f_0^2 / \Delta p^2 \sigma_2$; $q_4 = f_0^2 / \Delta p^2 \sigma_4$.

将方程(10)与(11)线性化，并将(5)一(7)三方程相加，则可以得到：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 - \varphi_3) + \bar{u}_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \bar{u}_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\beta}{q_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_3 - \varphi_5) + \bar{u}_5 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \bar{u}_3 \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} + \frac{\beta}{q_4} \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} &= 0, \\ v_1 + v_3 + v_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

(12)式与地转关系(4)式就是三层模式的方程组。与 Wiin-Nielsen^[10] 用来讨论超长波的方程组是类似的。

三、超长波的不稳定—平流层作用

令

$$(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = (A_1, A_2, A_3) e^{i\mu(x-ct)}. \quad (13)$$

代入(12)式,便可解出 c 为:

$$c = \frac{1}{6} \left[\bar{u}_1 + 4\bar{u}_3 + \bar{u}_5 - 2\beta \left(\frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_4} \right) \right] \pm \frac{1}{6} \sqrt{D}. \quad (14)$$

其中

$$D = \left\{ 4\beta^2 \left(\frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_4^2} - \frac{1}{q_2 q_4} \right) + [(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) - (\bar{u}_3 - \bar{u}_5)]^2 + \frac{4\beta}{q_4} [2(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) + (\bar{u}_3 - \bar{u}_5)] - \frac{4\beta}{q_2} [(\bar{u}_1 - \bar{u}_3) + 2(\bar{u}_3 - \bar{u}_5)] \right\}. \quad (15)$$

$D < 0$ 即为超长波不稳定的条件. 和 Wiin-Nielsen^[10] 所给的完全相似. Wiin-Nielsen 已着重讨论了风速切变对超长波不稳定的作用. 这里我们将注意大气层结的作用.

设 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_5 = \bar{u}' =$ 常数, 可以在 q_2, q_4 平面上给出 $D = 0$ 的曲线, 即超长波不稳定的临界区域(图 2). 图 2 指出在 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_5$ 的条件下, 欲使超长波不稳定, 必须高空的静力稳定度大于低空, 即 $q_2 < q_4$. 当 q_2 和 q_4 固定时, u' 愈大超长波愈不稳定. 这很容易由(15)式看出. 当 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_5$ 时, 该式可写为:

$$D = \left\{ 4\beta^2 \left(\frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_4^2} - \frac{1}{q_2 q_4} \right) + 12\beta u' \left(\frac{1}{q_4} - \frac{1}{q_2} \right) \right\}.$$

因为 $\left(\frac{1}{q_2^2} + \frac{1}{q_4^2} - \frac{1}{q_2 q_4} \right)$ 永为正值, 欲使 $D < 0$, 必须 $q_2 < q_4$. 当 D 已小于零, 则 u' 愈大,

$|D|$ 亦愈大, 即愈不稳定.

因为平流层与对流层的最大差异在于平流层的静力稳定度远大于对流层, 因此平流层将会促进超长波的不稳定. 为了说明这个问题, 我们另取 4 层模式,

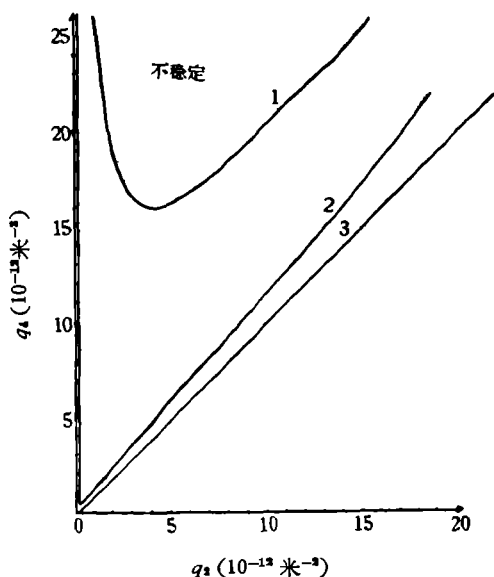


图 2 静力稳定度对于超长波不稳定的影响

- (1 表示 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 0.17 \frac{\text{米/秒}}{\text{公里}}$,
- 2 表示 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = 1.7 \frac{\text{米/秒}}{\text{公里}}$,
- 3 表示 $\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \infty$)

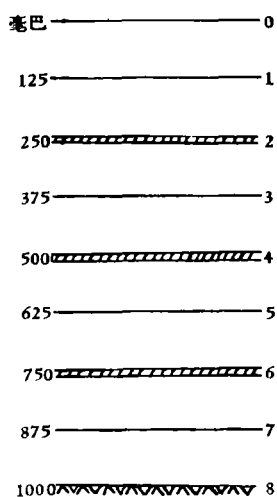


图 3 四层模式分层图

如图 3 所示. 其中最上一层为平流层. 于是有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_1 - \varphi_3) + \bar{u}_3 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - \bar{u}_1 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \frac{\beta}{q_2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_3 - \varphi_5) + \bar{u}_5 \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} - \bar{u}_3 \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} - \frac{\beta}{q_4} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x} \right) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_5 - \varphi_7) + \bar{u}_7 \frac{\partial \varphi_5}{\partial x} - \bar{u}_5 \frac{\partial \varphi_7}{\partial x} + \frac{\beta}{q_6} \frac{\partial \varphi_7}{\partial x} &= 0, \\ v_1 + v_3 + v_5 + v_7 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

仍令 $\varphi_j = A_j e^{i\mu(x-ct)}$ ($j = 1, 3, 5, 7$), 代入(16)式便可求出 $c = c_r + ic_i$, $c_i \neq 0$ 即为不稳定的条件。

令对流层风速切变均匀地为 $\partial \bar{u} / \partial z = 1.7$ 米秒⁻¹公里⁻¹, 平流层 $\partial \bar{u} / \partial z = 0$ 。在图 2 $\partial \bar{u} / \partial z = 1.7$ 米秒⁻¹公里⁻¹曲线上任取 4 点, 即 4 对 q_2 和 q_4 。以此 4 对 q_2 和 q_4 之值作为现在模式中的 q_4 和 q_6 之值。再令现模式中平流层的 $q_2 = 0.8 \times 10^{-12}$ 米⁻² ($\sigma_2 = 20 \times 10^{-12}$ 米⁴克⁻²秒²)。由此可以算出四个 c_i , 列于表 1。

表 1 平流层对超长波不稳定的影响

$\sigma_4(q_4)$	3.4(2.6)	2.1(4.3)	1.5(6.0)	1.1(6.9)
$\sigma_6(q_6)$	3.0(3.0)	1.8(5.0)	1.3(7.0)	1.3(8.0)
c_i (米秒 ⁻¹)	3.37	3.41	4.00	4.35

由表中可以看出这四点的 c_i 皆不为零, 即对这四点超长波都是不稳定的, 而且它的增长率 (μc_i) 随着对流层 (σ_4, σ_6) 与平流层 σ_2 之差的增大而增大。因为这四点在图 2 (无平流层) 中都在 $\partial \bar{u} / \partial z = 1.7$ 米秒⁻¹公里⁻¹的临界曲线上 ($c_i = 0$), 这说明平流层的存在促进了超长波的不稳定。

四、不稳定超长波的结构和能量转换

为了进一步搞清楚不稳定超长波的性质, 我们将讨论它的能量转换。现以三层模式为例, 取如下参数:

$$q_2 = 2 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}, \quad q_4 = 4 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}, \quad \beta = 16 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-1} \text{ 秒}^{-1}.$$

$$f_0 = 10^{-4} \text{ 秒}^{-1}, \quad \bar{u}_5 = 10 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_3 = 20 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_1 = 30 \text{ 米秒}^{-1}.$$

将这些值代入(3.2)式, 得

$$c = 16 + 2.83i \text{ (米秒}^{-1}\text{)}. \quad (17)$$

由(12),(13)和(17)式可求出:

$$A_1 = 1.24 e^{198^\circ 04' i} A_5, \quad A_3 = 0.43 e^{64^\circ 38' i} A_5.$$

再将 A_1 和 A_3 代入(13)式并取虚部, 可得扰动位势的表达式为:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= 1.24 A e^{bt} \sin [\mu(x - 16t) + 198^\circ 04'], \\ \varphi_3 &= 0.43 A e^{bt} \sin [\mu(x - 16t) + 64^\circ 38'], \\ \varphi_5 &= A e^{bt} \sin [\mu(x - 16t)]. \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 $A = A_5$, $b = \mu c_i$ 。通过地转关系, 可将(18)式代入(5)–(7)式, 求出 ω_2 和 ω_3 。由(18)式以及 ω 可绘出不稳定超长波的结构, 如图 4 所示 (μ 取为 0.42×10^{-6} 米⁻¹, 相当于波长 $L = 15000$ 公里)。

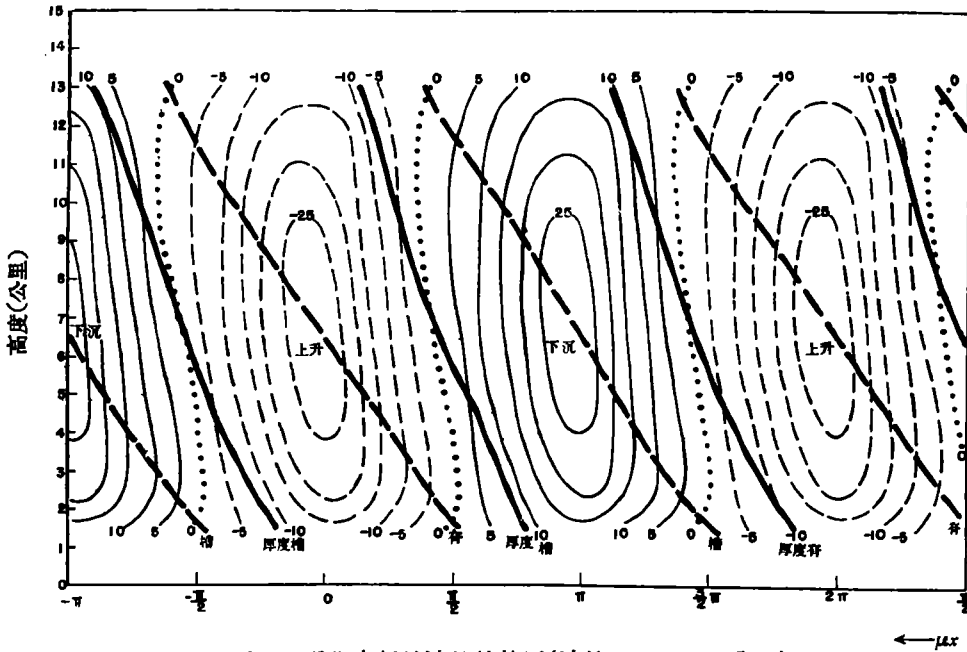


图4 不稳定超长波的结构图(波长 $L = 15000$ 公里)

[黑细(虚)线为等 ω (垂直运动)线,单位是 10^{-5} 毫巴/秒(振幅 $A = 1000$ 米 2 秒 $^{-1}$)]

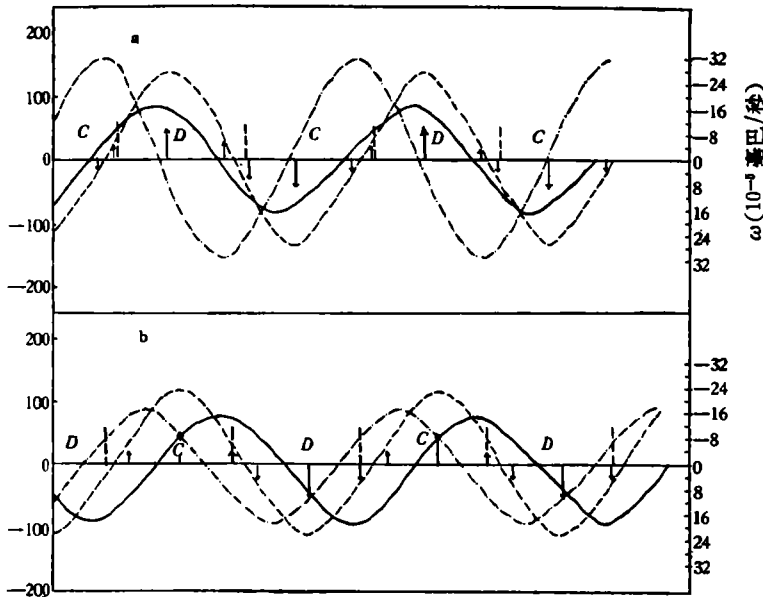


图5 高低空超长波的平面结构(图5a为高空-334毫巴,图5b为低空-668毫巴)

[—代表高度波, - - -代表温度波, ····代表 ω (单位同图4)波, D与C分别代表辐散辐合,以垂直虚线分界.箭头表示垂直运动方向].

图5 a和5 b分别为“2”层(334毫巴)和“4”层(668毫巴)上的高度波(φ)、温度(即厚度)波、 ω 波、以及散度的分布.由图4和图5可以看出:不稳定超长波的高度和温度槽

脊綫都是后傾的。温度波在任何高度都落后于高度波,这一点 Wiin-Nielsen^[11] 已指出过,低空落后程度要比高空更大一些。在所取参数值下,“1”层(167 毫巴)和“5”层(835 毫巴)上的环流型式有了 180° 的位移。由于无论高空或低空都是温度波落后于高度波,所以上下层的热量都是向北输送。

不稳定的超长波的结构在低空与高空也有很大的不同。低空槽前辐合,槽后辐散;槽脊綫和辐散辐合綫很相近。在高空则脊綫在辐散区,槽綫在辐合区。因此低空,槽前暖空气上升,槽后冷空气下沉,所以位能转为动能。到了高空,下沉区偏于暖区,上升区偏于冷区,故有动能转为位能的趋势。所以对这种上下一致发展的超长波,能量的供应主要来自于对流层。

五、超长波扰动对基本场的反馈

前面几节所得的超长波的不稳定解只能适用于距初始时刻附近的时间。时间一长,则必须考虑扰动对基本场的反馈。反馈的结果使基本场发生变化,这样又反过来使扰动的发展也会受到阻尼。Charney^[7]、叶笃正和陈雄山^[8]等都用过这种方法研究过长波发展的問題。我们也将引用这种方法讨论不稳定的超长波的发展。在长波問題中,他们仅考虑基本气流的反馈;在我们这里,除了基本气流外,还必须考虑扰动对大气层结的反馈,因为大气层结的分布对超长波的稳定状态有很大的影响。

1. 对垂直切变的反馈

兹定某一变量 $F(x, y, t)$ 沿緯圈的平均,及其平均的偏差 $F'(x, y, t)$ 分别为:

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}(y, t) &= \frac{1}{L} \int_0^L F(x, y, t) dx, \\ F'(x, y, t) &= F(x, y, t) - \bar{F}(y, t). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

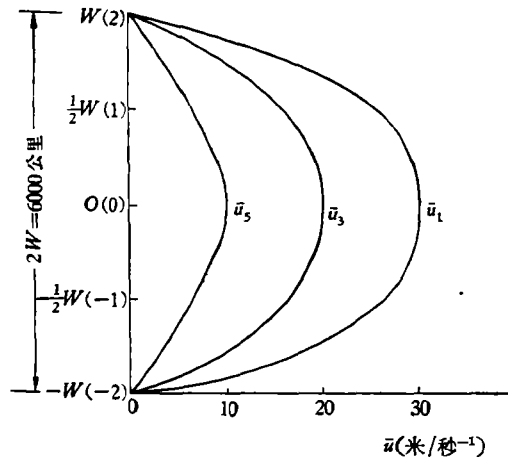
其中 L 为波长。按此定义,将(8)和(9)式平均,则可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{\varphi}_{i-1} - \bar{\varphi}_{i+1}) + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_i (\varphi'_{i-1} - \varphi'_{i+1})} + \frac{\beta}{f_0} \overline{v'_i (\varphi'_{i-1} - \varphi'_{i+1})} - \Delta P \overline{\sigma'_i \omega'_i} - \\ - \Delta P \bar{\sigma}_i \bar{\omega}_i = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

将(20)式对 y 微分,并使用地转关系,则得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_{i-1} - \bar{u}_{i+1}) = \frac{1}{f_0} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \overline{v'_i (\varphi'_{i-1} - \varphi'_{i+1})} + \frac{\beta}{f_0^2} \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_i (\varphi'_{i-1} - \varphi'_{i+1})} - \\ - \frac{\Delta P}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} \overline{\sigma'_i \omega'_i} - \frac{\Delta P}{f_0} \frac{\partial}{\partial y} \bar{\sigma}_i \bar{\omega}_i. \end{aligned} \quad (21)$$

从上式可见,为了求得扰动对切变的反馈,需要知道扰动的經向分布,因此,我们不能再前面扰动与 y 无关的假定。现取西风带宽度($2W$)为 6000 公里,并设平均西风(\bar{u})对西风带的中点(O)对称,扰动函数对此点对称或反对称。同时,在西风带的两端, \bar{u} 及所有的扰动皆为零,如图 6 所示。在 y 方向取五点: $y = 0$, $y = \pm \frac{1}{2} W$, $y = \pm W$ 。沿此五条綫上的函数值分别以第二个角标“0”,“ ± 1 ”和“ ± 2 ”表示之。如 \bar{u}_{30} 表示“3”层上沿 $y = 0$ 的 \bar{u} 。在此五点上将(5.3)式差分,并将 i 用 2 与 4 代替,便得到:

图6 初始时刻 ($t=0$) 平均西风的经向分布

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_{10} - \bar{u}_{30}) &= \frac{8}{f_0 W^2} [\overline{v'_{21}(\varphi'_{11} - \varphi'_{31})} - \overline{v'_{20}(\varphi'_{10} - \varphi'_{30})}], \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_{11} - \bar{u}_{31}) &= \frac{4}{f_0 W^2} [\overline{v'_{20}(\varphi'_{10} - \varphi'_{30})} - 2\overline{v'_{21}(\varphi'_{11} - \varphi'_{31})}], \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_{30} - \bar{u}_{50}) &= \frac{8}{f_0 W^2} [\overline{v'_{41}(\varphi'_{31} - \varphi'_{51})} - \overline{v'_{40}(\varphi'_{30} - \varphi'_{50})}], \\ \frac{\partial}{\partial t} (\bar{u}_{31} - \bar{u}_{51}) &= \frac{4}{f_0 W^2} [\overline{v'_{40}(\varphi'_{30} - \varphi'_{50})} - 2\overline{v'_{41}(\varphi'_{31} - \varphi'_{51})}]. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

(22)式就是扰动对平均西风垂直切变的反馈方程。由此可以看出，切变的变化仅决定于扰动热量输送在 y 方向的分布。

2. 对静力稳定度的反馈

按静力稳定度的定义：

$$\sigma = -\alpha \frac{\partial \ln \theta}{\partial p}. \quad (23)$$

其中 $\alpha = RT/P$, R 是气体常数。

由静力学方程

$$T = -\frac{P}{R} \frac{\partial \varphi}{\partial p}. \quad (24)$$

将(24)式对 P 进行微分：

$$\frac{\partial T}{\partial p} = -\frac{1}{R} \left(P \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right). \quad (25)$$

将位温公式代入(23)式,展开,并注意到(25)式,则任意 i 层 ($j=0, 2, 4, 6$) 上静力稳定度为：

$$\sigma_i = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \right)_i + \frac{\kappa}{P_i} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_i. \quad (26)$$

其中 $\kappa = c_v/c_p$ 。把絕热方程(2)对 p 微分,并写在 i 层上,可得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \right)_i + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \right)_i \cdot \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_i + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \right)_i + \left(\frac{\partial \sigma \omega}{\partial p} \right)_i = 0. \quad (27)$$

再把(2)乘以 $\frac{\kappa}{P_j}$, 与(27)相加,并注意到(26), 得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_i}{\partial t} + \left[\left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial p} \right)_i + \frac{\kappa}{P_j} \mathbf{V}_i \right] \cdot \nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p} \right)_i + \mathbf{V}_i \cdot \nabla \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} \right)_i \\ + \left(\frac{\partial \sigma \omega}{\partial p} \right)_i + \frac{\kappa}{P_j} \sigma_i \omega_i = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

(28)式就是靜力稳定度随時間变化的方程。对(28)式沿緯圈取平均,得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}'_i}{\partial t} - \frac{1}{\Delta P^2} \left[\frac{\partial}{\partial y} (\overline{v'_{j-1} \varphi'_{j+1}} + \overline{v'_{j+1} \varphi'_{j-1}}) + \frac{\beta}{f_0} (\overline{v'_{j-1} \varphi'_{j+1}} + \overline{v'_{j+1} \varphi'_{j-1}}) \right] + \\ + \frac{\kappa}{\Delta P P_j} \left[\frac{\partial}{\partial y} \overline{v'_j (\varphi'_{j+1} - \varphi'_{j-1})} + \frac{\beta}{f_0} \overline{v'_j (\varphi'_{j+1} - \varphi'_{j-1})} \right] + \left(\frac{\partial \bar{\omega}' \sigma'}{\partial p} \right)_i + \\ + \left(\frac{\partial \bar{\omega} \bar{\sigma}}{\partial p} \right)_i + \frac{\kappa}{P_j} (\overline{\sigma'_j \omega'_j} + \bar{\sigma}_j \bar{\omega}_j) = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

把(29)式对 p 方向的微分全部用差分代替,并认为 $\bar{\sigma}_i$ 在 y 方向是均匀的,則得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\sigma}_i}{\partial t} - \frac{\beta}{5 \Delta P^2 f_0} [2(\overline{v'_{j-1,1} \varphi'_{j+1,1}} + \overline{v'_{j+1} \varphi'_{j-1,1}}) + \overline{v'_{j-1,0} \varphi'_{j+1,0}} + \overline{v'_{j+1,0} \varphi'_{j-1,0}}] + \\ + \frac{\beta \kappa}{5 \Delta P P_j} [2\overline{v'_{j,1} (\varphi'_{j-1,1} - \varphi'_{j+1,1})} + \overline{v'_{j,0} (\varphi'_{j-1,0} - \varphi'_{j+1,0})}] + \\ + \frac{1}{5 \Delta P} [2(\overline{\sigma'_{j+2,1} \omega'_{j+2,1}} - \overline{\sigma'_{j-2,1} \omega'_{j-2,1}}) + \overline{\sigma'_{j+2,0} \omega'_{j+2,0}} - \overline{\sigma'_{j-2,0} \omega'_{j-2,0}}] + \\ + \frac{1}{5 \Delta P} [2(\bar{\sigma}_{j+2} \bar{\omega}_{j+2,1} - \bar{\sigma}_{j-2} \bar{\omega}_{j-2,1}) + \bar{\sigma}_{j+2} \bar{\omega}_{j+2,0} - \bar{\sigma}_{j-2} \bar{\omega}_{j-2,0}] + \\ + \frac{\kappa}{5 P_j} [\overline{\sigma'_{j,0} \omega'_{j,0}} + 2\overline{\sigma'_{j,1} \omega'_{j,1}}] + \frac{\kappa}{5 P_j} [\bar{\sigma}_j \bar{\omega}_{j,0} + 2\bar{\sigma}_j \bar{\omega}_{j,1}] = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

取 $j = 2, 4$ 即可求得 $\bar{\sigma}_2$ 和 $\bar{\sigma}_4$ 的变化方程。

在(5.12)式中出现了平均垂直运动($\bar{\omega}$) (它对 $\bar{\sigma}$ 的作用我們作了具体的估計, 結果很小, 可以略去不計。所以在后面的計算中, 我們略去 $\bar{\omega}$ 項)。由于在(5)一(7)式中取 $\bar{v}_1 = \bar{v}_3 = \bar{v}_5 = 0$, 故 $\bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_4 = 0$ 。

六、扰动发展到頂点的时间 and 强度

許多作者^[1,2]都給出过扰动場与基本場之間的能量轉換方程, 考虑靜力稳定度为時間的函数, 即 $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(t)$, 把它的形式加以修改, 則有:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (P' + K') = \iint \frac{1}{2\bar{\sigma}_2(t)} \left[-\frac{1}{\bar{\sigma}_2(t)} \frac{d\bar{\sigma}_2(t)}{dt} (\varphi'_1 - \varphi'_3)^2 + f v'_2 (\varphi'_1 - \varphi'_3) \cdot \right. \\ \left. \cdot (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) \right] dx dy + \iint \frac{1}{2\bar{\sigma}_4(t)} \left[-\frac{1}{\bar{\sigma}_4(t)} \frac{d\bar{\sigma}_4(t)}{dt} \cdot \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cdot (\overline{\varphi'_3 - \varphi'_5})^2 + f_0 \overline{\nu'_4 (\varphi'_3 - \varphi'_5) (\bar{u}_3 - \bar{u}_5)}] dx dy + \\ & + \iint \left[\bar{u}_1 \frac{d}{dy} (\overline{u'_1 \nu'_1}) + \bar{u}_3 \frac{d}{dy} (\overline{u'_3 \nu'_3}) + \bar{u}_5 \frac{d}{dy} (\overline{u'_5 \nu'_5}) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (31)$$

上式积分区域为 $0 \leq x \leq L$ 和 $-W \leq y \leq W$, 式中左端为扰动动能与扰动位能的变化, 右端为基本场与扰动场之间的能量转换率. 当上式为零时, 扰动发展到极值.

令 $\frac{d}{dt} (P' + K') = 0$, 并在 y 方向用辛普生 (Simpson) 数值积分公式进行近似积分, 则有:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\bar{\sigma}_2(t)} \left\{ -\frac{1}{\sigma_2(t)} \frac{d\bar{\sigma}_2(t)}{dt} [(\overline{\varphi'_{10} - \varphi'_{30}})^2 + 4(\overline{\varphi'_{11} - \varphi'_{31}})^2] + f_0 \cdot \right. \\ & \cdot \overline{\nu'_{20} (\varphi'_{10} - \varphi'_{30}) (\bar{u}_{10} - \bar{u}_{30})} + 4f_0 \overline{\nu'_{21} (\varphi'_{11} - \varphi'_{31}) (\bar{u}_{11} - \bar{u}_{31})} \left. \right\} + \\ & + \frac{1}{\bar{\sigma}_4(t)} \left\{ -\frac{1}{\sigma_4(t)} \frac{d\bar{\sigma}_4(t)}{dt} [(\overline{\varphi'_{30} - \varphi'_{50}})^2 + 4(\overline{\varphi'_{31} - \varphi'_{51}})^2] + \right. \\ & \left. + f_0 \overline{\nu'_{40} (\varphi'_{30} - \varphi'_{50}) (\bar{u}_{30} - \bar{u}_{50})} + 4f_0 \overline{\nu'_{41} (\varphi'_{31} - \varphi'_{51}) (\bar{u}_{31} - \bar{u}_{51})} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (32)$$

利用地转关系, 将上式中的 ν' 代以相应的 φ' , 然后再将 φ' 的表达式代入上式, 即可求得扰动发展到极值的时间, 再将此时间代入(13)式, 即可求得扰动发展到最大的振幅.

七、三层模式中超长波发展个例的计算

为了比较有平流层和无平流层时超长波的发展, 我们首先在一个没有平流层作用的三层模式中, 计算超长波的发展. 给定如下的基本场的初值和参数:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{50} &= 10 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{30} = 20 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{10} = 30 \text{ 米秒}^{-1}; \\ \bar{u}_{51} &= 6 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{31} = 16 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{11} = 26 \text{ 米秒}^{-1}; \\ \bar{\sigma}_2 &= 4.48 \times 10^{-12} \text{ 米}^4 \text{克}^{-2} \text{秒}^2, \quad \bar{\sigma}_4 = 2.24 \times 10^{-12} \text{ 米}^4 \text{克}^{-2} \text{秒}^2; \\ q_2 &= 2 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}, \quad q_4 = 4 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}; \\ \beta &= 16 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-1} \text{秒}^{-1}, \quad f_0 = 10^{-4} \text{ 秒}^{-1}; \end{aligned}$$

取波长 $L = 15000$ 公里, 即 $\mu = 0.42 \times 10^{-6} \text{ 米}^{-1}$.

这里首先应该指出, 方程(14)是在 \bar{u} 和扰动与 y 无关的假定下求出的, 而这里没有这个假定. 因此, 这个方程似乎不能直接应用. 但将 $(\bar{u}_{50}, \bar{u}_{30}, \bar{u}_{10})$ 和 $(\bar{u}_{51}, \bar{u}_{31}, \bar{u}_{11})$ 分别代入(14)式, 得到两个 c 值, 其虚部 c_i 完全相同, 其实部 c_r 相差也很少, 同时 c_r 与下面的计算完全无关. 因此, 我们不再对新情况求新的频率方程, 而将 \bar{u} 沿 y 平均后, 直接用(14)式. 由此可以得到:

$$c = 14.0 \pm 2.83i \text{ (米秒}^{-1}\text{)}. \quad (33)$$

对我们有兴趣的只是正号, 这样就可以求得扰动位势:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_{10} &= \varphi'_{11} = 1.24 A e^{bt} \sin [\mu(x - 14t) + 198^\circ 04'], \\ \varphi'_{30} &= \varphi'_{31} = 0.43 A e^{bt} \sin [\mu(x - 14t) + 64^\circ 38'], \\ \varphi'_{50} &= \varphi'_{51} = A e^{bt} \sin [\mu(x - 14t)]. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

其中 $b = \mu c_i = 1.02 \times 10^{-6} \text{ 秒}^{-1}$ $A = A_{50} = A_{51}$.

求出扰动位势后, 就可以计算各层之间的热量输送:

$$\left. \begin{aligned} \overline{v'_{20}(\varphi'_{10} - \varphi'_{30})} &= \overline{v'_{21}(\varphi'_{11} - \varphi'_{31})} = 0.810 \times 10^{-3} A^2 e^{2bt}, \\ \overline{v'_{40}(\varphi'_{30} - \varphi'_{50})} &= \overline{v'_{41}(\varphi'_{31} - \varphi'_{51})} = 0.816 \times 10^{-3} A^2 e^{2bt}. \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

由上式看出, 不稳定扰动对于热量的输送, 无论在高空或低空, 都是向北的。这与第四节中所给出的温压场结构是相符合的。

有了各层之间的热量输送值后, 利用(22)式, 就可以求出各层的切变随时间的变化:

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_{10} - \bar{u}_{30} &= 10 \text{ (米秒}^{-1}\text{)}, \quad \bar{u}_{11} - \bar{u}_{31} = 10 - 14.99x \text{ (米秒}^{-1}\text{)}, \\ \bar{u}_{30} - \bar{u}_{50} &= 10 \text{ (米秒}^{-1}\text{)}, \quad \bar{u}_{31} - \bar{u}_{51} = 10 - 10.17x \text{ (米秒}^{-1}\text{)}. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

其中 $x = 10^{-7} A^2 (e^{2bt} - 1)$ 。由(36)式可以看出, 扰动场对基本场的反馈, 在高空与低空, 都是使切变减弱。但是, 在本模式中, 中纬度各层的基本气流切变不受反馈影响。这是由于我们在“0”点与“1”点所取的基本气流初始切变相同所致。如不相同, 则中纬度各层基本气流的切变也将受反馈作用而变化。

利用(30)式, 也可求出在扰动的反馈下, 静力稳定度随时间的变化:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= (4.48 - 0.05x) \times 10^{-12} \text{ 米}^4 \text{克}^{-2} \text{秒}^2, \\ \bar{\sigma}_4 &= (2.24 + 0.41x) \times 10^{-12} \text{ 米}^4 \text{克}^{-2} \text{秒}^2. \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

由(37)式可以看出, 在扰动的反馈下, 静力稳定度在高空减小, 在低空则增大, 即静力稳定度的垂直差异, 由于扰动的反馈而减小。 $\bar{\sigma}$ 变化的绝对值则是高空小, 低空大。

把以上所得到的量代入方程(32), 经计算后, 可得一个 x 是四次的代数方程式, 求得 $x = 0.83$ 。将此 x 值代入(36)式, 则得扰动发展到极大值时各层的切变为:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{10} - \bar{u}_{30} &= 10 \text{ (米秒}^{-1}\text{)}, \quad \bar{u}_{11} - \bar{u}_{31} = -2.4 \text{ (米秒}^{-1}\text{)}, \\ \bar{u}_{30} - \bar{u}_{50} &= 10 \text{ (米秒}^{-1}\text{)}, \quad \bar{u}_{31} - \bar{u}_{51} = 1.6 \text{ (米秒}^{-1}\text{)}. \end{aligned}$$

可见, 扰动的反馈使切变变化很大, 各层迅速减小, 在高空, 甚至出现西风向上微弱增加的情况。再将 x 值代入(37)式, 得:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= 4.44 \times 10^{-12} \text{ 米}^4 \text{克}^{-2} \text{秒}^2; \\ \bar{\sigma}_4 &= 2.56 \times 10^{-12} \text{ 米}^4 \text{克}^{-2} \text{秒}^2. \end{aligned}$$

即垂直层结差异由于扰动反馈而变小, 但变化不大。

分别取扰动的初值振幅 A 为 500, 800, 1000 和 1500 米²秒⁻² ($A = 1000$ 米²秒⁻², 相当于 835 毫巴上高度扰动振幅为 100 米), 计算得的扰动极大振幅及扰动发展的时间, 列于表 2。

表 2 初值振幅与极大振幅及扰动发展时间的关系

初值振幅(米)	极大振幅 (米)			扰动发展时间(天)
	φ_5	φ_3	φ_1	
50	302	130	374	17.6
80	303	130	376	12.9
100	307	132	381	11.0
150	327	141	405	7.6

从表 2 可以看出: 扰动发展到顶点所需的时间随着初值扰动振幅的增大而减小, 这一点和长波是一样的^[8]; 扰动的极大振幅对于初值振幅有很强的保守性, 初值振幅由 50 米增加到 150 米, 增大了三倍, 而极大振幅却只增加了 11.0%。

在扰动能量方程(32)中, 如取 $\bar{\sigma}$ 为常数, 即只让扰动对切变产生反馈作用, 使用以上例子中相同的参数值, 则可求得 $x = 0.82$ 。对于初值振幅 $A = 100$ 米, 可得 835 毫巴上扰动极大振幅为 296 米, 扰动发展天数为 12.4 天, 和表 2 中第三行相比, 就能看出二者差别甚微。

八、平流层对超长波发展的影响—四层模式

在对流层中取与上例相同的风速廓线与 $\bar{\sigma}$ 的分布, 但较上例多加一个静力稳定度很大, 而风速垂直切变为零的平流层, 于是各层的基本场的初值为*:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_2 &= 20 \times 10^{-12} \text{ 米}^3 \text{ 克}^{-2} \text{ 秒}^2, \quad \bar{\sigma}_4 = 4.48 \times 10^{-12} \text{ 米}^3 \text{ 克}^{-2} \text{ 秒}^2, \quad \bar{\sigma}_6 = 2.24 \times 10^{-12} \text{ 米}^3 \text{ 克}^{-2} \text{ 秒}^2, \\ q_2 &= 0.8 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}, \quad q_4 = 3.6 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}, \quad q_6 = 7.2 \times 10^{-12} \text{ 米}^{-2}, \\ \bar{u}_{70} &= 8 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{50} = 16 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{30} = 24 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{10} = 24 \text{ 米秒}^{-1}, \\ \bar{u}_{71} &= 4 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{51} = 12 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{31} = 20 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{11} = 20 \text{ 米秒}^{-1}. \end{aligned}$$

由此可得:

$$c = 9.82 + 3.64i \text{ (米秒}^{-1}\text{)}.$$

以及扰动位势的表达式为:

$$\begin{cases} \varphi'_{70} = \varphi'_{71} = Ae^{bt} \sin [\mu(x - 9.82t)], \\ \varphi'_{50} = \varphi'_{51} = 1.02Ae^{bt} \sin [\mu(x - 9.82t) + 77^\circ 05'], \\ \varphi'_{30} = \varphi'_{31} = 2.59Ae^{bt} \sin [\mu(x - 9.82t) + 116^\circ 10'], \\ \varphi'_{10} = \varphi'_{11} = 2.24Ae^{bt} \sin [\mu(x - 9.82t) + 252^\circ 39']. \end{cases}$$

各层的热量输送值为:

$$\begin{cases} \overline{v'_{20}(\varphi'_{10} - \varphi'_{30})} = \overline{v'_{21}(\varphi'_{11} - \varphi'_{31})} = 8.41 \times 10^{-3} A^2 e^{2bt}, \\ \overline{v'_{40}(\varphi'_{30} - \varphi'_{50})} = \overline{v'_{41}(\varphi'_{31} - \varphi'_{51})} = 3.50 \times 10^{-3} A^2 e^{2bt}, \\ \overline{v'_{60}(\varphi'_{50} - \varphi'_{70})} = \overline{v'_{61}(\varphi'_{51} - \varphi'_{71})} = 2.09 \times 10^{-3} A^2 e^{2bt}. \end{cases}$$

可见, 加上平流层后, 热量输送的方向各层仍都是朝北, 但大小有了很大的不同, 高空向北输送值最大, 中空次之, 低空最小。

扰动发展到极大时, 各处的风速切变为:

$$\begin{aligned} \bar{u}_{11} - \bar{u}_{31} &= -27.6 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{10} - \bar{u}_{30} = 0 \text{ 米秒}^{-1}, \\ \bar{u}_{31} - \bar{u}_{51} &= -4.1 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{30} - \bar{u}_{50} = 8 \text{ 米秒}^{-1}, \\ \bar{u}_{51} - \bar{u}_{71} &= 0.8 \text{ 米秒}^{-1}, \quad \bar{u}_{50} - \bar{u}_{70} = 8 \text{ 米秒}^{-1}. \end{aligned}$$

和前例比较, 可以看出: 在平流层影响下, 扰动发展到极大时, 切变的变化比没有平流层时要大得多, 而且, 平流层产生了强大的风速向上递减层。

初值与扰动到极大时的振幅和发展时间的关系见表 3。

* 注意同一角标在三层和四层模式中不代表同一高度, 故虽然风速廓线相同, 但两个模式中的 \bar{u}_6 , \bar{u}_8 和 \bar{u}_1 不同。

表 3 初值振幅与极大振幅及扰动发展时间的关系(有平流层)

初值振幅(米)	极大振幅 (米)				扰动发展时间(天)
	φ_7	φ_5	φ_3	φ_1	
50	160	163	414	359	8.7
100	186	190	482	417	4.7

和前例比较,可以看出: 加上平流层后, 低空扰动振幅变小, 高空增大, 与实况比较更加一致。

九、波长、风速切变和静力稳定度对超长波发展的影响

1. 波长与极大振幅及扰动发展时间的关系: 对同样的复速度(c_i), 波长愈长, 增长率就愈小, 因而波长不同, 发展到极值的时间也将不一样。取与七节相同的参数, 并令初值振幅 $A = 100$ 米。分别对波长 $L = 10000$ 公里, 15000 公里和 20000 公里的扰动进行计算, 所得结果列于表 4。

表 4 波长与超长波发展的关系

波长(公里)	极大振幅 (米)			扰动发展时间(天)
	φ_5	φ_3	φ_1	
10000	306	132	379	7.7
15000	307	132	381	11.0
20000	306	132	379	14.6

由表 4 可看出, 超长波的波长对于最后所要达到的振幅并没有影响, 但波长愈长, 扰动发展的时间就愈久。

2. \bar{u} 的垂直切变对于扰动发展的影响

取 $q_2 = 2 \times 10^{-12}$ 米⁻², $q_4 = 4 \times 10^{-12}$ 米⁻², $A = 100$ 米, 并令 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_5$, 扰动发展的极大振幅及发展时间列于表 5a。

表 5a 切变与超长波的发展

切变 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3 = \bar{u}_3 - \bar{u}_5$ (米秒 ⁻¹)	极大振幅 (米)			扰动发展时间(天)
	φ_5	φ_3	φ_1	
5	145	110	239	8.6
6	167	115	247	8.9
8	241	120	318	10.5
10	307	132	381	11.0

由表可以看出: 扰动的极大振幅随着初值切变的增加而加大, 在高空 (φ_1) 与低空 (φ_5) 都非常明显, 在中空, 增大的趋势比较慢。切变增加, 扰动发展的时间也稍有增长。

风速切变的上下差异也对超长波的发展有影响。现令 $R = (\bar{u}_1 - \bar{u}_3) / (\bar{u}_3 - \bar{u}_5)$, 并取与表 5a 相同的静力稳定度。先固定 $\bar{u}_3 - \bar{u}_5$ 为 10 米秒⁻¹, 变动 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3$; 再固定 $\bar{u}_1 - \bar{u}_3$ 为 10 米秒⁻¹, 而变动 $\bar{u}_3 - \bar{u}_5$, 即可得两组 R 与极大振幅及扰动发展时间的关系, 二者分别

列于表 5b 和 5c (初值振幅均为 100 米)。

表 5b 风速切变上下差异与超长波的发展 ($\bar{u}_3 - \bar{u}_5 = 10$ 米秒⁻¹)

$\bar{u}_1 - \bar{u}_5$ (米秒 ⁻¹)	$\bar{u}_1 - \bar{u}_3$ (米秒 ⁻¹)	R	极 大 振 幅 (米)			扰动发展时间 (天)
			φ_5	φ_3	φ_1	
6	-4	-0.4	190	137	105	10.8
8	-2	-0.2	195	134	170	9.8
10	0	0	207	132	224	8.8
14	4	0.4	245	130	287	9.4
16	6	0.6	269	131	323	10.0
20	10	1.0	307	132	381	11.0
24	14	1.4	342	133	438	12.3

表 5c 风速切变上下差异与超长波的发展 ($\bar{u}_1 - \bar{u}_3 = 10$ 米秒⁻¹)

$\bar{u}_1 - \bar{u}_5$ (米秒 ⁻¹)	$\bar{u}_3 - \bar{u}_5$ (米秒 ⁻¹)	R	极 大 振 幅 (米)			扰动发展时间 (天)
			φ_5	φ_3	φ_1	
8	-2	-5.0	没有扰动的发展			
10	0	∞				
14	4	2.5				
16	6	1.7	214	113	315	14.2
20	10	1.0	307	132	381	11.0
24	14	0.7	378	159	427	10.2

表 5b 与 5c 告诉我们几点事实: a) 由表 5b 可知, 当低空切变固定时, 高空的切变愈小, 则扰动的振幅就愈小, 而扰动发展的时间也就愈短。如高空是一个风速向上递减的层次, 则扰动振幅会出现低空大, 高空小的情况, 扰动发展时间也随着该层风速递减的增大而增长。b) 由表 5c 可看出, 低空切变较高空小, 是一个阻碍扰动发展的因子, 只有在二者较接近时, 才有扰动的发展。扰动发展的天数随着低空切变增大而减小。

3. 静力稳定度分布对超长波发展的影响 取风速分布与第七节相同, 令 $r = q_1/q_2$, 改变 q_1 或 q_2 即可得到两组 r 和扰动发展的关系。结果分别列于表 6a 和 6b。

表 6a 低空静力稳定度与超长波的发展

q_2 (米 ⁻²)	r	极 大 振 幅 (米)			扰动发展时间 (天)
		φ_5	φ_3	φ_1	
2×10^{-12}	2	307	132	381	11.0
	3	306	150	373	8.8
	4	297	131	347	8.0
	5	294	171	362	7.6

从表 6a 中可见, 如减低初值低空静力稳定度时, 高空和低空扰动的振幅都会出现缓慢下降的趋势, 中空(φ_3)则不甚规则, 变化范围都很小, 发展时间则缩短。当固定 q_1 , 增大高空静力稳定度时, 则扰动极大振幅在中空(φ_3)迅速增加, 高空(φ_1)增加较慢, 但低空则较小,

表 6b 高空静力稳定度与超长波的发展

q_1 (米 ⁻²)	r	极大振幅 (米)			扰动发展时间 (天)
		φ_0	φ_2	φ_1	
4×10^{-12}	2	307	132	381	11.0
	3	285	180	370	8.5
	4	251	233	391	6.2
	5	219	276	403	5.4

同时,随着高空稳定度的增加,扰动发展时间缩短。这点与第八节中平流层对超长波发展的作用是一致的。

結束語: 本文分两部分, 分别讨论了超长波的不稳定与发展。风速的垂直切变与静力稳定度的垂直分布是两个重要因子, 扰动的反馈作用使切变的改变很大, 但对静力稳定度的影响却很小。特别有意思的是平流层对超长波的不稳定与发展都起着助长作用。

本文只是一个初步探讨, 许多理论结果有待于进一步用事实来验证。

参 考 文 献

- [1] Jaw, J. J. (赵九章), The Formation of Semipermanent Centers of Action in Relation to the Horizontal Solenoidal Field, *J. Meteor.*, 1946, pp. 103—114.
- [2] Charney, The Dynamics of Long Waves in a Baroclinic Westerly Current, *J. Meteor.*, 1947, pp. 135—162.
- [3] Kuo, H. L. (郭晓岚), The Stability Properties and Structure of Disturbances in a Baroclinic Atmosphere, *J. Meteor.*, 1953, pp. 235—243.
- [4] Gates, A Dynamical Model for Large-scale Tropospheric and Stratospheric Motions, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1957, pp. 141—160.
- [5] Burger, On the Non-existence of Critical Wave Length, *J. Atmo. Scien.*, 1962, pp. 31—40.
- [6] Kuo, H. L. (郭晓岚), Dynamic Instability of Two Dimensional Non-divergent Flow in a Barotropic Atmosphere, *J. Meteor.*, 1949, pp. 105—122.
- [7] Charney, On the General Circulation of the Atmosphere, *The Atmosphere and the Sea in Motion*, 1959, pp. 178—193.
- [8] 叶笃正、陈雄山, 非线性效应在形成阻塞高压中的作用, *气象学报*, **33** (1963), pp. 145—152.
- [9] 朱抱真, 大地形和热源的动力控制与超长波活动关系的初步研究, *气象学报*, **34** (1964), 285—298.
- [10] Wiin-Nielsen, A Preliminary Study of Dynamics of Transient Planetary Waves in the Atmosphere, *Tellus*, 1961, pp. 320—333.
- [11] Burger, Scale Consideration of Planetary Motion of the Atmosphere, *Tellus*, 1958, pp. 195—205.
- [12] Phillips, The General Circulation of the Atmosphere, a Numerical Experiment, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, 1956, pp. 123—164.

A PRELIMINARY STUDY ON THE INSTABILITY AND DEVELOPMENT OF THE ULTRA-LONG WAVES

YEH TU-CHENG

(Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica)

WANG HSIAO-LING

(Department of Geophysics, Peking University)

ABSTRACT

This paper deals with the problem of the instability and development of the ultra-long waves in frictionless and adiabatic motion. It is found that the controlling factors on the instability are the vertical distribution of the static stability and the vertical shear of the basic current. The occurrence of the instability requires that the upper layer of the atmosphere possesses higher static stability than the lower layer. The existence of the stratosphere provides this requirement. Further the degree of instability increases with the value of the shear.

Taking the considerations of the feedback effect of the disturbances (ultra-long waves) on the basic field, equations concerning the variations of the static stability and the vertical shear of the basic westerlies are derived. From the condition that $\frac{d}{dt}(P' + K') = 0$, the time required for the unstable disturbance to grow to its maximum intensity and the final amplitude (i.e. the maximum amplitude) are computed. [P' and K' are respectively the eddy potential (including internal) energy and the kinetic energy per wave length.]. The theoretical findings agree with the observations. It is further found that the final maximum amplitude of an unstable ultra-long wave depends only on the structure of the initial state of the basic field, but not on the initial state of the disturbance.

Besides, the wave length affects the time for the disturbance to grow to its maximum intensity. The longer the wave-length the longer is the time of the growth. The presence of the stratosphere makes the final amplitude of the unstable disturbance smaller in the lower layer but larger in the upper layer (compared with the case without stratosphere).