

正压原始方程的一个数值試驗*

刘瑞芝 张济朋

(中国科学院地球物理研究所) (中国科学院计算技术研究所)

提 要

本文为应用正压原始方程作数值预报的初步试验。采用时间空间中央差分进行数值求解。通过试验确定了一种简单可用的边界条件及初始条件。

应用此方案对四个天气实例进行了 24 小时预报。计算结果尚好。对这四个实例中所包括的正压天气过程一般能较好的反映出来。

一、引 言

描述大气运动本应采用完整的流体力学方程组，但是由于求解这组方程存在着种种困难，如数学处理的复杂性，实测风资料的精确度及测站的密度之不足产生初值问题，等等。因而长久以来，原始方程未能应用到实际中来。准地转模式虽然尚能反映大尺度运动的一般状况，但毕竟存在着不少的缺点^[1,2]，为了进一步探讨大气运动的物理机制，以及改进数值天气预告，是需要应用完整的流体力学方程组。随着电子计算机的发展，使这一工作有条件提到日程上来。本工作仅从简单的模式着手，对其中的一些问题进行了初步研究，确定了一种较稳定的计算方案，并给出了计算结果。

二、方程组及其数学处理

无粘性的正压流体运动方程及连续方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} + \phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $\phi = gz$ ， g 为重力加速度， z 取 500 毫巴的高度， u, v 为 500 毫巴水平风速在 x, y 坐标上的分量， f 为柯氏参数。

将方程组(1)化为以下守恒形式进行差分求解。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u\phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uu\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(uv\phi) - fv\phi &= -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\phi^2}{2}\right), \\ \frac{\partial}{\partial t}(v\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(uv\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(vv\phi) + fu\phi &= -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\phi^2}{2}\right), \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(u\phi) + \frac{\partial}{\partial y}(v\phi) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

* 本文 1964 年 6 月 13 日收到。

其中 $fu\phi$ 及 $fv\phi$ 项采用四周网点的平均值。

对方程组(2)进行差分求解, 经过试验确定了时间空间中央差分方案(第一个时间步长用向前差分, 其步长采用 $\Delta t/2$)。差分方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \phi_i + (u\phi)_x^n + (v\phi)_y^n &= 0, \\ (u\phi)_i + \left(u^2\phi + \frac{1}{2}\phi^2\right)_x^n + (uv\phi)_y^n &= (f\phi v)_{ij}^n, \\ (v\phi)_i + (uv\phi)_x^n + \left(u^2\phi + \frac{1}{2}\phi^2\right)_y^n &= -(f\phi u)_{ij}^n. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

其中引用的标号如下:

$$\left. \begin{aligned} ()_x &= [()_{i+1,j} - ()_{i-1,j}] \frac{m_{ij}}{2h}, \\ ()_y &= [()_{i,j+1} - ()_{i,j-1}] \frac{m_{ij}}{2h}, \\ ()_i &= [()_{ij}^{n+1} - ()_{ij}^{n-1}] \frac{1}{2\Delta t}. \end{aligned} \right\}$$

差分方程(3)的稳定条件为:

$$\frac{\Delta t}{h} (\sqrt{2} U_m + \sqrt{\phi}) < \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (4)$$

其中 Δt 为时间步长, h 为空间步长, $U_m = \max(|u|, |v|)$ 。分析证明¹⁾差分方程(3)无衰减性, 但是有寄生波存在, 将影响计算结果。

差分方程组(3)在北半球范围进行数值计算, 必然引入边值问题。经过试验给出了一种比较可用而又简单的边界条件。

首先从物理特性上考虑, 我们所取的边界接近于北纬 10 度, 正是冬半年副热带高压的中心位置, 根据副热带高压的中心风速很小而高度变化比较缓慢的特点, 将边界条件写为:

$$\left. \begin{aligned} \phi|_{\Gamma} &= \text{常数}, \\ \bar{v}|_{\Gamma} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

其中 Γ 表示在边界上的数值。用此边界条件作了 24 小时的实例计算, 其效果尚好。

原始方程的初值包括高度场与风场, 目前实测风的资料在密度及精确度上都较差, 因而初始风场的实测资料中包含有一定的误差, 影响计算结果。因此, 在目前实测风资料不足的情况下, 不适于直接使用实测风作初值, 需要加以处理。目前一般均采用风场与高度场的关系通过高度场求风场。本工作中仅做了三种初值试验。

1. 初始风场采用实测风,
2. 初始风场采用地转风。

$$\left. \begin{aligned} u &\approx u^{(1)} = -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ v &\approx v^{(1)} = \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

1) 完整的流体力学方程组在天气预报中的数值试验(手稿)。

3, 按 Кибель 二級近似求风場:

$$\begin{aligned} u \approx u^{(2)} &= -\frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial y} - \frac{1}{f} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} + \frac{1}{f} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right], \\ v \approx v^{(2)} &= \frac{1}{f} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{f} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial t} + \frac{1}{f} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

我們將二級近似式(6)略去对時間微商項做了試驗。

將以上三种方法对 1958 年 1 月 27 日同一实例进行 24 小时預报; 試驗結果得出, 直接使用实测风作初值不适合, 小扰动混淆了主要的高度場。而后两种方法效果比較好。預計使用更完整的风場与高度場的关系間接求风場将会获得更好的結果。由于第二种方法簡單, 而且效果良好, 在本文中的实例計算中均采用了地轉风做初值。

三、計算結果

在以上所試驗的基础上, 我們采用了地轉风作初始风場, 固定的边界条件, 及中央差分方程組进行了四个 24 小时实例計算。

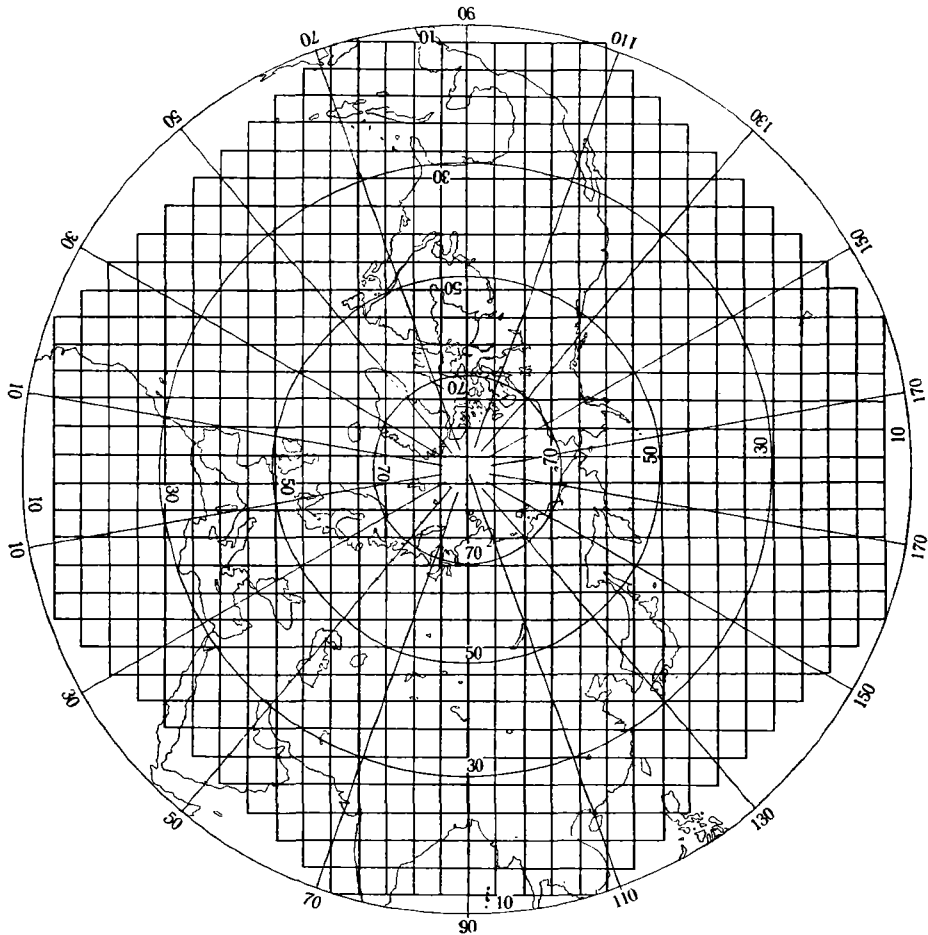


图 1 差分格网分布图
[ΔS (空间步长) = 600 公里]

計算范围取北半球区域,边界为八边形,网格取正方形,空間步长取 600 公里,時間步长取 10 分钟,网点共为 772 点(见图 1)。为了节省内存儲量,采用 Lilly^[3] 型的跳点法 (Staggered grid)。

現以 1958 年 1 月 27 日为例将計算結果詳細介紹。

图 2a 为 1958 年 1 月 27 日 500 毫巴高度場实况图,图 2b, 2c 分别为 24 小时后的实况及預报图。环流形势的特点及預报結果如下:

(1) 烏拉尔上空阻塞高压的崩潰: 1 月 27 日在烏拉尔上空維持一阻塞高压,中心强度为 564 什位势米。当新地島以西的冷槽随着冷空气的移动而向东南方显著的发展之际,促使烏拉尔阻高向东南方退出,逐漸削弱,两天之后消失。

預报結果是比較成功的、槽的移动位置与实况一致,只是强度較实况深。阻高的崩潰过程也反映出来,仅在速度及强度上略有不足。

(2) 欧洲沿岸阻塞高压的建立: 1 月 27 日在欧洲沿岸維持一高压脊,在其西部为深厚的大低压,由于此系統向东南摆,低压中心向北移有利于脊后暖空气北伸,使脊向北伸展很快。格陵兰以东地区原为低压带,28 日轉变为高压区。随着新地島西部的低压槽东南移,高压脊沿苏联欧洲部分向东伸,在丹麦与德国上空有閉合中心形成。

用原始方程对此欧洲系統預报部分成功,如高压以西的低压发展过程,該槽綫东移位置,及格陵兰以东高压脊的伸长,美洲北部环流轉变为平直环流都能反映出来。但是对欧洲阻塞高压的生成沒有預报出来。分析其原因,影响該系統发展的因子中,斜压作用占相当重要的地位,这点已由前人工作^[4]中对此例分析指出,而本模式是正压原始方程不能反

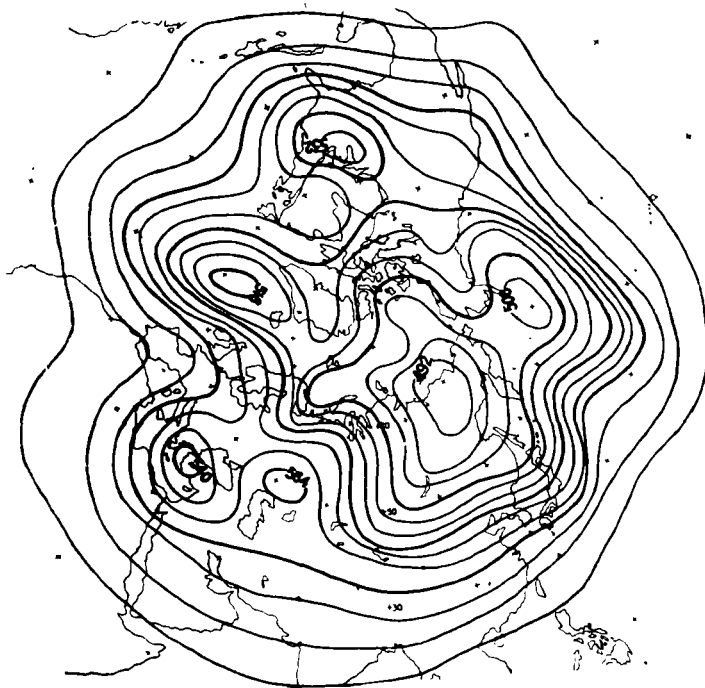


图 2a 1958 年 1 月 27 日 00 点(世界时) 500 毫巴等压面形势图

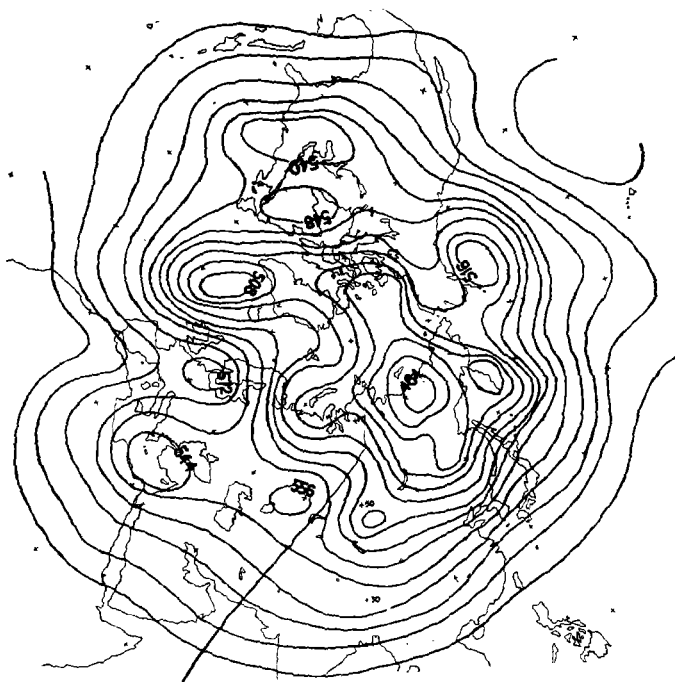


图 2b 1958 年 1 月 28 日 00 点(世界时) 500 毫巴等压面形势图

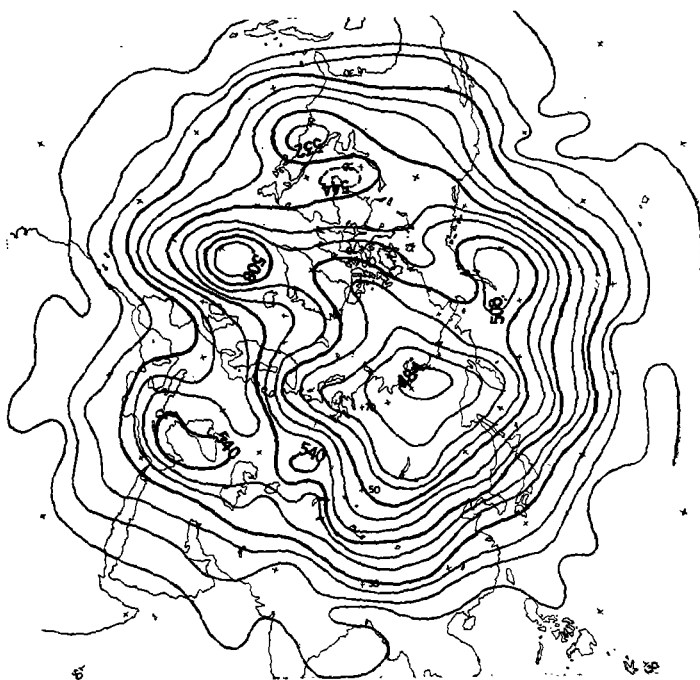


图 2c 1958 年 1 月 27 日 00 点(世界时) 24 小时 500 毫巴预报图
(预报模式为正压原始方程)

映出斜压的作用。

为了分析非地转风作用,将以上结果与地转正压模式预报结果(见图3)进行比较。在以上分析的个例中,除欧洲阻塞高压的建立过程均未报出之外,对其它系统来讲,用正压原始方程所计算的结果是比较好的,比较明显的是乌拉尔阻塞高压的崩溃过程在地转模式中没能正确的反映出来,只报出该高压原地削弱,没有报出其东移动,而原始方程对此系统的演变过程反映得比较正确。然而,图2c中欧洲高压脊的北伸强度及其东部切断低压西南伸的位置均较地转模式略差,影响前者的因子较复杂,不便于直观估计,而后者位置靠近边界不稳定区,原始方程对边界的误差所产生的影响是比较敏感的,估计边界误差对该系统影响较大。总的来看,原始方程对该例的计算结果是比较好的。



图3 1958年1月27日00点(世界时)24小时500毫巴预报图
(预报模式为正压地转方程)

1962年2月20日及22日两个例子分别为东亚横槽建立及崩溃过程,后一过程直接影响到东亚寒潮天气,是一次比较重要的天气过程。用地转正压模式对这两个过程所预报的结果是,对前一个过程能正确的反映,仅在横槽的强度及其西部强脊的位置略有不足,但是对横槽崩溃过程预报失败。原始方程对这两个过程基本上都能反映出来。对横槽建立过程所计算的效果及偏差均与地转正压模式相近。对横槽崩溃过程预报效果较地转正压模式有所改进,促成横槽崩溃的主要变化系统是格陵兰以东的浅脊的形成,它将有利的冷空气南下从而促使横槽西侧的脊显著的削弱,影响东亚横槽转向,用原始方程预报对此形势转变的关键地区均有所反映,只是对脊的削弱程度反映得不够。36小时预报结果明显的反映出横槽的转向,该预报图中对欧洲低压预报得过深是不正确的,但是对横槽

崩溃这一过程能够較好的反映出来。

1961年8月6日的个例属于夏季天气形势，天气系統均属于移动性的，很少強烈的发展。预报結果基本正确，只是移动速度較实况略慢，这与地轉模式所预报的結果相近。

綜合所得結果，初步概括出以下几点結論：

(1) 使用現有的方案所作的几个实例計算，其24小时預告結果还能令人滿意，一般来讲其效果不亚于地轉模式。对某些系統的演变过程較地轉模式略有改进。

(2) 目前的处理上仍存在許多不足之处，网格距过大是缺点之一，它起着平滑作用，使包含快波的作用不能很恰当的反映出来，而且对一些較小的系統也易漏掉，未来工作中必須將格距縮小。

(3) 所給的边界条件及初始条件有局限性，固定不变的边界条件实际上不能处处滿足。这对原始方程产生的影响將比地轉模式严重。因为原始方程時間步长較短，而且对边值又較敏感，因此边界的誤差对內部影响必然較地轉模式显著。用地轉风做初始风場不能恰当的反映出初始时刻非地轉风的作用。这也是有待于进一步改进的工作。

(4) 全場存在着普遍降低的現象。

(5) 差分格式中存在寄生波將影响計算結果，目前仍未得出較穩定的48小时結果，这是今后迫切需要解决的問題。

致謝：本工作承蒙叶篤正先生、冯康先生、曾庆存同志的指导，先后有周桂棣、袁琳秀、陈怀义、张宝严同志参加填图等輔助工作，曾佑思、刘允壮同志绘图，作者在此深表謝意。

参 考 文 献

- [1] 曾庆存，大气中的适应过程和发展过程(一)，气象学报，33(1963)，第二期。
- [2] 曾庆存，二层模式的完正流体力学热力学方程組在短期天气预报中的应用，动力气象论文集(二)，科学出版社，1963。
- [3] Lilly, D. K., A proposed staggered-grid system for numerical integration of dynamic equation. *M.W.R.*, 89(1961), p. 59—65.
- [4] 张錫福、刘瑞芝，动力气象论文集(二)冬季阻塞形势的建立与崩溃的数值试验。科学出版社，1963。

A NUMERICAL EXPERIMENT BY PRIMITIVE BAROTROPIC EQUATION

LIO RUEY-CHIH

(Institute of Geophysics and Meteorology)

CHANG CHI-PENG

(Institute of Computational Technology)

ABSTRACT

The numerical predictions for northern hemisphere by the primitive barotropic equations are tested in this paper. The finite difference scheme for centered differences in space and time is adopted. The boundary condition is fixed in such a way that along the boundary the heights are assumed to be invariable with time, and the winds vanish. The initial wind fields are determined by the geostrophic approximation and Kibel's second geostrophic approximation.

Four actual weather forecasts for 24 hours are presented. The results show that in general the barotropic processes in these examples are forecasted.