

正压涡度方程中考虑粘性项与平滑过程的一些意见*

张耀科

(中国科学院计算技术研究所)

提 要

本文首先讨论了如何依据空间步长来选取平滑系数。其次考虑在涡度方程中加上粘性项后对微分方程解的影响,讨论如何选取适当的粘性系数。第三讨论涡度方程加粘性项后对差分格式计算稳定性的影响,证明了在常用时间中心差分格式中应把粘性项取在第 $(n-1)$ 时间层,这样计算才是稳定的。反之,如把粘性项取在第 n 时间层,则差分格式计算不稳定。并且时间向前差的格式在加上粘性项后也可以稳定,但要求的粘性系数过大。最后讨论了用涡度方程作数值预告时加上平滑过程与加上粘性项之间的关系,从计算上看,二者并不等价。但可以把平滑过程与扩散方程类比,以确定适当的平滑系数。

一、平滑算子的数学性质

目前数值预报中常用的涡度方程如下:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

其中 $\zeta = \Delta\psi - \mu^2\psi + f$, ψ 为流函数, μ^2 为常数, f 为地转参数,而风速的两个分量为:

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

平滑的目的是消除或者减少计算误差造成的短波。常用平滑算子的公式为:

$$\zeta_{j,k}^* = \zeta_{j,k} + \alpha \Delta \zeta_{j,k}, \tag{2}$$

其中 $\zeta_{j,k}^*$ 表示平滑后的涡度, α 为平滑系数。又

$$\Delta \zeta_{j,k} = \zeta_{j+1,k} + \zeta_{j-1,k} + \zeta_{j,k+1} + \zeta_{j,k-1} - 4\zeta_{j,k}.$$

与一般讨论相同^[1],我们讨论各种波长衰减情况,令

$$\zeta = C + Ae^{i(mx+ny)}. \tag{3}$$

其中 $m = \frac{2\pi}{L_x}$, $n = \frac{2\pi}{L_y}$, m, n 为波数,设网格距为 $\Delta x = \Delta y = h$ 。由此求出振幅比值为:

$$\sigma = \frac{\bar{A}}{A} = 1 - 4\alpha \left(\sin^2 \frac{mh}{2} + \sin^2 \frac{nh}{2} \right). \tag{4}$$

\bar{A} 表示平滑后的振幅。

现在对各种 α 及各种波长计算 σ 之值,如附表 1 及图 1 所示。这里 $p = \frac{L_x}{h}$, $q = \frac{L_y}{h}$ 。

* 本文 1964 年 3 月 27 日收到。

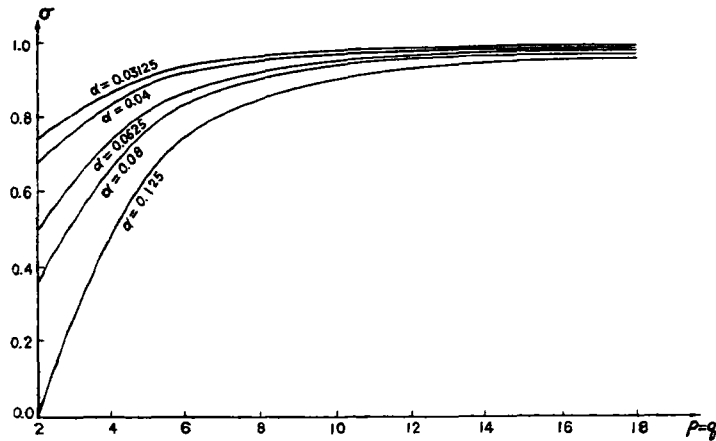


图 1 不同平滑系数的衰减情况
(按附表 I 的资料)

附表 1 的计算是对 $p = q$ 进行的。我们希望对在大气中起主要作用的长波衰减很少, 例如对波长 3600 公里的波, 希望在 24 小时内只衰减 5% 到 7%, 以此为标准, 由附表 1 可知:

(1) 如 $h = 300$ 公里, $\Delta t = 1$ 小时, 这时可以 24 小时平滑一次, 取 $\alpha = 0.08$ 到 0.125, 这样 3600 公里的长波衰减约为 4% 到 7%。

(2) 如 $h = 540$ 公里, $\Delta t = 1$ 小时, 仍然 24 小时平滑一次, 这时可取 $\alpha = 0.03125$ 到 0.04 或者更小一些, 这样 3600 公里的长波衰减约为 5% 到 6%。

由上所述, (2) 式这种平滑算子可以大大削弱短波而使长波接近不变(相对短波削弱来说), 因此可用之于数值预报, 以抑制计算误差(如向前差分格式造成的误差)的发展。但短波不全是计算误差, 有些短波却是气象上新生的小系统, 不应该平滑掉。如何从所有短波中分析出具有气象意义的小系统使之不被平滑, 而对代表计算误差的一切波全部予以消除, 这一问题是困难而有重大意义的。从这一意义上看, 形式(2)这种平滑算子并不理想。

另一方面如顾震潮^[2]所述, 我们讨论涡度方程考虑粘性项的线性化形式:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta v = A \nabla^2 \zeta, \quad (5)$$

这里 u 作为常数, $\zeta = \Delta \psi$, $v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$, $\beta = \frac{\partial f}{\partial y}$, A 为粘性系数, $\nabla^2 \zeta = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}$ 。这时微分方程之解析解为:

$$\psi = \sum_{m,n} a_{mn} e^{-\left(\frac{1}{L_m^2} + \frac{1}{L_n^2}\right) 4\pi^2 A t} e^{2\pi i \left(\frac{x - ct}{L_m} + \frac{y}{L_n}\right)}. \quad (6)$$

显然方程(5)中的粘性项使解引入了一个衰减项, 这就是阻尼因数 $e^{-\left(\frac{1}{L_m^2} + \frac{1}{L_n^2}\right) 4\pi^2 A t}$ (顾震潮^[2]的阻尼因数错写为 $e^{-\left(\frac{1}{L_m^2} + \frac{1}{L_n^2}\right) \pi^2 A t}$, 相差就大了)。由此可把 24 小时后的阻尼因数值

計算如下:

| 阻尼因数值 \ 波长 (公里) | 3600 | 2400 | 1200 | 600 |
|-------------------------|------|------|------|------|
| 粘性系数(米 ² /秒) | | | | |
| $A = 7 \times 10^4$ | 0.96 | 0.92 | 0.72 | 0.25 |
| $A = 2 \times 10^5$ | 0.35 | 0.09 | 0.00 | 0.00 |
| $A = 2 \times 10^6$ | 0.99 | 0.97 | 0.91 | 0.68 |
| $A = 5 \times 10^5$ | 0.77 | 0.55 | 0.09 | 0.00 |
| $A = 10^5$ | 0.95 | 0.88 | 0.62 | 0.15 |

说明: 表中 $L_m = L_n = L$, L 以公里为单位, 粘性系数 A 以米²/秒为单位。

可見如颶震潮所取 $A = 5 \times 10^5$ 米²/秒的平滑作用很大, 对波长为 3600 公里的长波在 24 小时内也要衰减 23%。如取 $A = 7 \times 10^4$ 或 $A = 10^5$, 这时 24 小时后衰减情况比较合适。

二、在涡度方程中考虑粘性项后对差分格式计算稳定性的影响

现在对(1)式的正压涡度方程考虑加入粘性项, 并讨论几种常用差分格式的稳定性问题。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + v \frac{\partial \zeta}{\partial y} = A \nabla^2 \zeta. \quad (7)$$

其中 $\zeta = \Delta \psi - \mu^2 \psi + f$, 粘性系数 $A > 0$

1. 时间中心差格式, 粘性项取在第 n 时间层, 其差分方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{im}^{n+1} - \zeta_{im}^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{\zeta_{i+1m}^n - \zeta_{i-1m}^n}{2\Delta s} + v \frac{\zeta_{im+1}^n - \zeta_{im-1}^n}{2\Delta s} = \\ = A \frac{\zeta_{i+1m}^n + \zeta_{i-1m}^n + \zeta_{im+1}^n + \zeta_{im-1}^n - 4\zeta_{im}^n}{\Delta s^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

这里如象讨论未加粘性项的涡度方程差分格式一样, 把 u, v 看作常数。命

$$\zeta_{im}^n = B^n e^{i(k_1 \Delta s + m k_2 \Delta s)}, \quad (9)$$

求出差分方程的放大矩阵为:

$$G = \begin{pmatrix} -2(ib + 4a) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

这里

$$\begin{aligned} a &= A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \left(\sin^2 \frac{k_1 \Delta s}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \Delta s}{2} \right), \\ b &= \frac{\Delta t}{\Delta s} (u \sin k_1 \Delta s + v \sin k_2 \Delta s), \end{aligned}$$

矩阵 G 之特征根为:

$$\mu_{1,2} = -(4a + bi) \pm \sqrt{(4a + bi)^2 + 1}. \quad (10)$$

由于 $\mu_1 \mu_2 = -1$, 要求 $|\mu_1| \leq 1, |\mu_2| \leq 1$, 就必须 $|\mu_1| = |\mu_2| = 1$ 。又 $\mu_1 + \mu_2 = -2(4a + bi)$, 所以稳定性之必要条件为:

$$|4a + bi| \leq 1 \quad \text{即} \quad 16a^2 + b^2 \leq 1, \quad (11)$$

要(11)式成立只須:

$$64A^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta s^4} + \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} [|u| + |v|]^2 \leq 1, \quad (12)$$

在未加粘性項(即 $a = 0$ 时), 計算稳定性之充分必要条件为:

$$b^2 < 1 \quad \text{这只需} \quad \frac{\Delta t}{\Delta s} [|u| + |v|] < 1, \quad (13)$$

由此可見, 加入粘性項后, 計算稳定性要求的条件更強了. (11)式或(12)式只是稳定性的必要条件, 現在来看这种条件成立时能否保証格式的稳定性成立. 自然有 $a \geq 0$, 現在討論 $a > 0$ 的情形.

(1) $b = 0$, 这时

$$\mu_{1,2} = -4a \pm \sqrt{(4a)^2 + 1}.$$

其中 $\mu_2 = -4a - \sqrt{(4a)^2 + 1} < -1$, 显然計算的稳定性不成立.

(2) $b > 0$, 設 $4a + bi = \alpha e^{i\beta}$, 其中 $\beta = \text{tg}^{-1} \frac{b}{4a}$, 如 $0 < \beta \leq \frac{\pi}{4}$, 考虑 $\mu_2 = -$

$$(4a + bi) - \sqrt{(4a + bi)^2 + 1},$$

$$(4a + bi)^2 = \alpha^2 e^{i2\beta}, \quad \text{而} \quad 0 < 2\beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

如把复数視作 $x - y$ 平面上的点, 这时 $(4a + bi)^2$ 仍然在第一象限內, 这时必有:

$$| [1 + (4a + bi)^2] | > 1,$$

由此推出 $|\mu_2| > 1$, 这样計算的稳定性仍然不成立. 具体情况可用图 2 来表示:

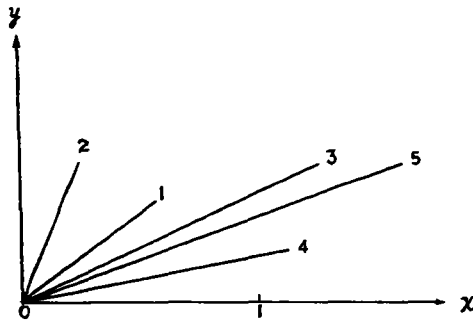


图 2 $-\mu_2 = (4a + bi) + \sqrt{(4a + bi)^2 + 1}$
 (1 点为 $(4a + bi)$ 其模 ≤ 1
 2 点为 $(4a + bi)^2$ 其模 ≤ 1
 3 点为 $(4a + bi)^2 + 1$ 其模 > 1
 4 点为 $\sqrt{(4a + bi)^2 + 1}$ 其模 > 1
 5 点为 $(4a + bi) + \sqrt{(4a + bi)^2 + 1}$ 其模 > 1)

(3) $b < 0$, 如 $-\frac{\pi}{4} \leq \beta < 0$ 时, 这与(2)相同, 稳定性不成立.

由此可知要稳定还必须 $|\beta| > \frac{\pi}{4}$, 即

$$|\text{tg } \beta| > 1 \quad \text{也就是} \quad |b| > 4a.$$

由于 k_1, k_2 为任意实数, 一般情况下即使 $u > 0, v > 0$ 时, $|b| > 4a$ 仍然不能成立, 例如: $k_1 \Delta s = k_2 \Delta s = \pi$ (相当于波长为 $2\Delta s$ 之波), 这时 $b = 0$, 而 $4a = 8A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} > 0$

因此, 差分格式(8)式绝对不稳定.

2. 时间中心差格式, 粘性项取在第 $(n-1)$ 时间层, 其差分方程为:

$$\begin{aligned} \frac{\zeta_{lm}^{n+1} - \zeta_{lm}^{n-1}}{2\Delta t} + u \frac{\zeta_{l+1m}^n - \zeta_{l-1m}^n}{2\Delta s} + v \frac{\zeta_{lm+1}^n - \zeta_{lm-1}^n}{2\Delta s} = \\ = A \frac{\zeta_{l+1m}^{n-1} + \zeta_{l-1m}^{n-1} + \zeta_{lm+1}^{n-1} + \zeta_{lm-1}^{n-1} - 4\zeta_{lm}^{n-1}}{\Delta s^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

与以上推导一样, 可以求出放大矩阵为:

$$G = \begin{pmatrix} -2ib & 1 - 8a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

a, b 意义与上同, G 之特征根为:

$$\mu_{1,2} = -bi \pm \sqrt{1 - 8a - b^2}.$$

当

$$8a + b^2 < 1 \quad (15)$$

时有二不等复根存在, (15)式即为稳定性的充分条件, 由此决定的稳定性区域如图 3 所示. 这时 $|\mu_1| = |\mu_2| = \sqrt{1 - 8a} \leq 1$, 计算稳定性成立, 但在积分过程中波的振幅要衰减. 衰减系数为

$$\xi = \left[1 - 8A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \left(\sin^2 \frac{k_1 \Delta s}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \Delta s}{2} \right) \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

ξ 值依赖于 k_1, k_2 , 对短波 ξ 值小, 当 $L \rightarrow \infty$ 时, ξ 值趋于 1. 现在取 $A = 10^5$ 米²/秒, $\Delta t = 1$ 小时, $\Delta s = 300$ 或 540 公里, 分别算出 ξ 之值, 并求出 ξ^{24} 之值, 这些都列在附表 2 及画在图 4 中. 由附表 2 可知, 用(14)式积分一步后, 无论什么波衰减都很少, 最多只衰减 3.25%. 但积分 24 步后, 对短波就衰减比较显著, 而对长波仍衰减很少. 如 $\Delta s = 300$ 公里, $p = q = 12$ (相当于 3600 公里波长), $\xi^{24} = 0.9498$, 衰减为 5%. 如 $\Delta s = 540$ 公里, $p = q = 7$ (相当于 3780 公里波长), $\xi^{24} = 0.9563$, 衰减也不到 5%. 从这点看, (14)式用之于数值预报是可行的.

条件(15)式成立只须:

$$16A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} + \frac{\Delta t^2}{\Delta s^2} [|u| + |v|]^2 < 1. \quad (17)$$

(17)与(13)式比较多了一项 $16A \frac{\Delta t}{\Delta s^2}$, 即加入粘性项后稳定性条件更强了. 但条件(17)式强了多少可以具体计算如下, 这里取 $A = 10^5$ 米²/秒, $\Delta t = 1$ 小时.

(1) $\Delta s = 300$ 公里, 这时 $16A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} = 0.064$, 这就要 $\frac{\Delta t}{\Delta s} [|u| + |v|] < \sqrt{0.936} \cong 0.9675$;

(2) $\Delta s = 540$ 公里, 这时 $16A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} = 0.019753$, 这就要 $\frac{\Delta t}{\Delta s} [|u| + |v|] < \sqrt{0.980247} \cong 0.99$.

由此可见加入粘性项后, 对原来稳定性判据 (13) 式影响并不大, 即条件 (17) 式并未加强很多. 这也可以从图 3 看出, 一般说

$16A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \leq 0.064$, 这时稳定性区域为图 3 中画有斜线的部分.

3. 时间向前差格式, 粘性项自然取在第 n 时间层.

$$\begin{aligned} & \frac{\zeta_{lm}^{n+1} - \zeta_{lm}^n}{\Delta t} + u \frac{\zeta_{l+1m}^n - \zeta_{l-1m}^n}{2\Delta s} + \\ & + v \frac{\zeta_{lm+1}^n - \zeta_{lm-1}^n}{2\Delta s} = \\ & = A \frac{\zeta_{l+1m}^n + \zeta_{l-1m}^n + \zeta_{lm+1}^n + \zeta_{lm-1}^n - 4\zeta_{lm}^n}{\Delta s^2}, \quad (18) \end{aligned}$$

未加粘性项时这个格式的放大系数为:

$$\xi = 1 - ib. \quad (19)$$

其中 $b = \frac{\Delta t}{\Delta s} (u \sin k_1 \Delta s + v \sin k_2 \Delta s)$, $|\xi| =$

$\sqrt{1 + b^2}$, 只要 $L > 2\Delta s$, $|\xi| > 1$. 仅对 $L = 2\Delta s$ 之波 $|\xi| = 1$. 所以这种差分格式不稳定. 现在看加上粘性项后能否保证计算稳定性. 格式 (18) 式的放大系数为:

$$\xi = (1 - 4a) + ib. \quad (20)$$

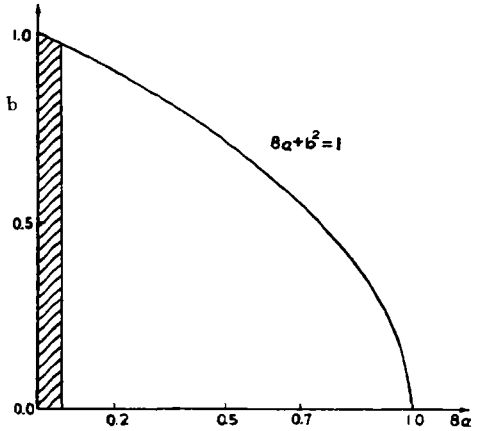


图 3 稳定区域图

时间中心差分格式, 粘性项取在第 $(n-1)$ 时间层 (图中曲线 $8a + b^2 = 1$ 与二坐标轴所围成的区域即为稳定区域. 一般说 $8a \leq 0.064$, 这时稳定区域为图中有斜线的部分)

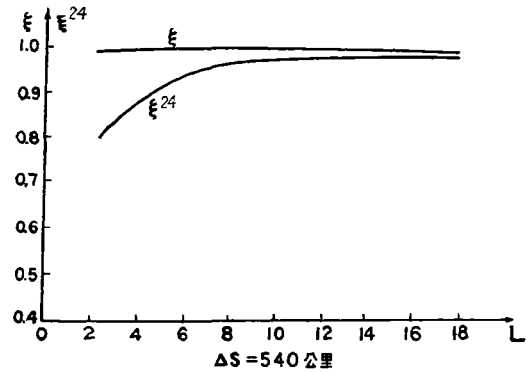
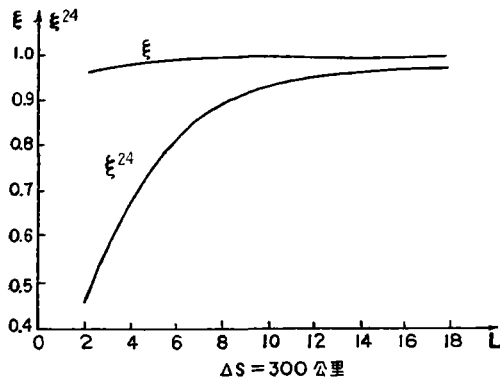


图 4 中心差分格式加粘性项后之放大系数 ξ 及 ξ^{24}

($\Delta t = 1$ 小时, $A = 10^9$ 米²/秒, 按附表 2 的资料)

其中 $a = A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \left(\sin^2 \frac{k_1 \Delta s}{2} + \sin^2 \frac{k_2 \Delta s}{2} \right)$, $|\xi|^2 = 1 - 8a + 16a^2 + b^2$, 现在要求 $|\xi|^2 \leq 1$.

问题是如何选取粘性系数 A 以保证计算稳定性成立.

(1) 我们规定

$$A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \leq \frac{1}{16}, \quad (21)$$

由 $1 - 8a + 16a^2 + b^2 \leq 1$ 推出 $b^2 \leq 8a(1 - 2a)$, 又由 (21) 式可知 $(1 - 2a) \geq \frac{3}{4}$,

所以上式成立只須:

$$b^2 \leq 6a.$$

現在設 $k_1 = k_2 = k$, 就可看出要 $b^2 \leq 6a$ 成立只要: $A \geq \frac{1}{3} \Delta t [|u| + |v|]^2$, 由此得出:

$$\frac{1}{3} \Delta t [|u| + |v|]^2 \leq A \leq \frac{1}{16} \frac{\Delta s^2}{\Delta t},$$

在这种条件下, 差分格式(18)式是稳定的, 即有

$$\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1.$$

現在来看粘性系数 A 的数值范围, 設 $\Delta t = 1$ 小时, $\Delta s = 300$ 公里, $|u| = |v| = 10$ 米/秒, 于是有:

$$4.8 \times 10^5 \text{ 米}^2/\text{秒} \leq A \leq 15.625 \times 10^5 \text{ 米}^2/\text{秒}. \quad (22)$$

可見为了差分格式稳定, 粘性系数必須取的很大, 从 § 2 中对阻尼因数值計算可知, 24 小时后这种粘性系数对各种波长衰減都很大, 即使对 3600 公里的长波也要衰減 20% 以上. 所以这样加粘性項的向前差分格式并不合用. 这是假定了风速 u, v 为 10 米/秒的情形, 如风速加大, 則粘性系数还要取更大的值, 显然, 这时格式(18)式更不适用.

(2) 如規定 $A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \leq \frac{1}{32}$, 与以上同样推导可以得出:

$$\frac{3}{4} \leq |\xi| \leq 1,$$

$$\frac{2}{7} \Delta t [|u| + |v|]^2 \leq A \leq \frac{1}{32} \frac{\Delta s^2}{\Delta t}.$$

用以上 $\Delta t, \Delta s, u, v$ 之值代入有:

$$4.114 \times 10^5 \text{ 米}^2/\text{秒} \leq A \leq 7.8125 \times 10^5 \text{ 米}^2/\text{秒}.$$

显然这样的粘性項仍然太大, 差分格式(18)式也不合用.

总之, 由于考虑了大气中的湍流作用, 在正压涡度方程中加入粘性項, 这时仍然應該采用时空中心差分格式. 而在化差分方程时, 应把粘性項取在第 $(n-1)$ 時間层, 这样才能保証計算的稳定性, 并且对原来未加粘性項时的稳定性判据影响很小.

三、加粘性項与平滑的关系

我們来討論对涡度 ζ 的湍流扩散方程:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = A \nabla^2 \zeta, \quad (23)$$

其差分格式为:

$$\zeta_{im}^{n+1} = \zeta_{im}^n + A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \Delta \zeta_{im}^n. \quad (24)$$

(24)式与(2)式相比較, 形式完全相同, 只要取

$$a = A \frac{\Delta t}{\Delta s^2}. \quad (25)$$

所以顾震潮^[2]正确地指出: “平滑过程实质上可由湍流过程来实现.” 这样就給一般

数值预报中的平滑过程赋予了适当的物理意义。

一般数值预报中的平滑过程是在积分若干步后插入一次平滑运算, 相当于插入求解一步对 ζ 的扩散方程, 这与直接在涡度方程中加上粘性项来作数值预报并不完全相同。从实际差分化数值计算中可以看出这种区别。现在以线性化的涡度方程为例来讨论。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \beta v = 0, \quad (26)$$

其差分方程为:

$$\zeta_{lm}^{n+1} = \zeta_{lm}^{n-1} + 2\Delta t \left[-u \frac{\zeta_{l+1m}^n - \zeta_{l-1m}^n}{2\Delta s} - \beta \frac{\psi_{l+1m}^n - \psi_{l-1m}^n}{2\Delta s} \right]. \quad (27)$$

求出 ζ^{n+1} 后再加以平滑运算求新的 ζ^{*n+1} ,

$$\zeta^{*n+1} = \zeta_{lm}^{n+1} + \alpha \Delta \zeta_{lm}^{n+1}. \quad (28)$$

而方程(26)加上粘性项后的差分方程为:

$$\begin{aligned} \zeta_{lm}^{n+1} = \zeta_{lm}^{n-1} + 2\Delta t \left[-u \frac{\zeta_{l+1m}^n - \zeta_{l-1m}^n}{2\Delta s} - \beta \frac{\psi_{l+1m}^n - \psi_{l-1m}^n}{2\Delta s} + \right. \\ \left. + A \frac{\zeta_{l+1m}^{n-1} + \zeta_{l-1m}^{n-1} + \zeta_{lm+1}^{n-1} + \zeta_{lm-1}^{n-1} - 4\zeta_{lm}^{n-1}}{\Delta s^2} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

这里为了计算稳定性, 粘性项取在第 $(n-1)$ 时间层。现在就来讨论以下两种过程有何不同。

(1) 先解方程(27), 再用(28)式平滑一次。

(2) 直接解带粘性项的方程(29)。

把(27)式代入(28)式可得:

$$\begin{aligned} \zeta_{lm}^{*n+1} = [\zeta_{lm}^{n-1} + \alpha \Delta \zeta_{lm}^{n-1}] + 2\Delta t \left[-\frac{u}{2\Delta s} (\zeta_{l+1m}^n + \alpha \Delta \zeta_{l+1m}^n) + \right. \\ \left. + \frac{u}{2\Delta s} (\zeta_{l-1m}^n + \alpha \Delta \zeta_{l-1m}^n) - \frac{\beta}{2\Delta s} (\psi_{l+1m}^n + \alpha \Delta \psi_{l+1m}^n) + \frac{\beta}{2\Delta s} (\psi_{l-1m}^n + \alpha \Delta \psi_{l-1m}^n) \right]. \quad (30) \end{aligned}$$

这就等价于先把 ζ^{n-1} 及 ζ^n 两个场平滑后再积分一步, 而(29)式可化为:

$$\zeta_{lm}^{n+1} = \left(\zeta_{lm}^{n-1} + 2A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} \Delta \zeta_{lm}^{n-1} \right) + 2\Delta t \left[-u \frac{\zeta_{l+1m}^n - \zeta_{l-1m}^n}{2\Delta s} - \beta \frac{\psi_{l+1m}^n - \psi_{l-1m}^n}{2\Delta s} \right]. \quad (31)$$

这等价于先对 ζ^{n-1} 场以 $2A \frac{\Delta t}{\Delta s^2}$ 为平滑系数进行平滑运算后, 再按差分方程(27)积分一步。由此可见以上所说两种过程并不相同, 即差分式(30)与(31)式并不等价。下面来看如何从公式(25)来确定一般数值预报的平滑系数。

我们取 $A = 10^5$ 米²/秒, $\Delta t = 1$ 小时。

① $\Delta s = 300$ 公里, 这时 $\alpha = A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} = 0.004$;

② $\Delta s = 540$ 公里, 这时 $\alpha = A \frac{\Delta t}{\Delta s^2} = 0.001235$ 。

由第一节知道, 这种平滑系数作用很小。这里是讨论 $\Delta t = 1$ 小时, 要求每积分一步后用这种平滑系数作用一次。如果我们 24 步才平滑一次, 希望对前 24 小时的预报过程加以适当的湍流扩散作用, 则可以取 $\Delta t = 24$ 小时, 这样:

① $\Delta s = 300$ 公里, $\alpha = 0.096$;

② $\Delta s = 540$ 公里, $\alpha = 0.0296$.

这就与第一节讨论的平滑系数取法基本上一致。

最后再提一句,关于一维线性化的涡度方程加上粘性项后对差分计算的影响, Miyakoda 曾在 1959 年作了详细讨论^[3]。我们这里第二节的结论与他大致相同,不过这里是对二维情况讨论的,因此讨论方法有所不同。

致谢: 馮康先生及廖洞贤、王宗皓二同志曾对本文提出了宝贵意见,作者在此表示衷心感谢。

附表 1

| 振幅比值 波长 | 平滑系数 | $\alpha = 0.03125$ | $\alpha = 0.04$ | $\alpha = 0.0625$ | $\alpha = 0.08$ | $\alpha = 0.125$ |
|------------|--------|--------------------|-----------------|-------------------|-----------------|------------------|
| | | 2h | 0.7500 | 0.6800 | 0.5000 | 0.3600 |
| 3h | 0.8124 | 0.7599 | 0.6249 | 0.5198 | 0.2498 | |
| 4h | 0.8750 | 0.8400 | 0.7500 | 0.6800 | 0.5000 | |
| 5h | 0.9136 | 0.8894 | 0.8271 | 0.7787 | 0.6543 | |
| 6h | 0.9375 | 0.9200 | 0.8751 | 0.8401 | 0.7502 | |
| 7h | 0.9529 | 0.9397 | 0.9059 | 0.8795 | 0.8117 | |
| 8h | 0.9634 | 0.9531 | 0.9268 | 0.9062 | 0.8535 | |
| 9h | 0.9708 | 0.9626 | 0.9415 | 0.9251 | 0.8830 | |
| 10h | 0.9761 | 0.9694 | 0.9523 | 0.9389 | 0.9045 | |
| 12h | 0.9833 | 0.9786 | 0.9665 | 0.9571 | 0.9330 | |
| 14h | 0.9876 | 0.9841 | 0.9752 | 0.9683 | 0.9505 | |
| 16h | 0.9905 | 0.9878 | 0.9810 | 0.9756 | 0.9619 | |
| 18h | 0.9925 | 0.9904 | 0.9849 | 0.9807 | 0.9699 | |

附表 2 $\xi = \left[1 - \gamma \sin^2\left(\frac{\pi}{p}\right)\right]^{\frac{1}{2}}$

| L | ξ | γ | $\gamma = 0.064$ | | $\gamma = 0.019753$ | |
|--------------|--------|----------|------------------|------------|---------------------|------------|
| | | | ξ | ξ^{24} | ξ | ξ^{24} |
| $2\Delta s$ | 0.9675 | | 0.4522 | 0.990074 | 0.787093 | |
| $3\Delta s$ | 0.9757 | | 0.5542 | 0.992565 | 0.836012 | |
| $4\Delta s$ | 0.9839 | | 0.6769 | 0.995050 | 0.887720 | |
| $5\Delta s$ | 0.9889 | | 0.7647 | 0.996582 | 0.921118 | |
| $6\Delta s$ | 0.9919 | | 0.8240 | 0.997528 | 0.942325 | |
| $7\Delta s$ | 0.9940 | | 0.8646 | 0.998139 | 0.956275 | |
| $8\Delta s$ | 0.9953 | | 0.8931 | 0.998553 | 0.965829 | |
| $9\Delta s$ | 0.9962 | | 0.9138 | 0.998844 | 0.972617 | |
| $10\Delta s$ | 0.9969 | | 0.9291 | 0.999057 | 0.977603 | |
| $12\Delta s$ | 0.9979 | | 0.9498 | 0.999338 | 0.984240 | |
| $14\Delta s$ | 0.9984 | | 0.9626 | 0.999511 | 0.988328 | |
| $16\Delta s$ | 0.9988 | | 0.9712 | 0.999624 | 0.991014 | |
| $18\Delta s$ | 0.9990 | | 0.9771 | 0.999702 | 0.992869 | |

其中 $\gamma = 16A \frac{\Delta s}{\Delta s^2}$, 现在取 $\Delta s = 1$ 小时, $A = 10^3$ 米²/秒。

(1) $\Delta s = 300$ 公里, $\gamma = 0.064$;

(2) $\Delta s = 540$ 公里, $\gamma = 0.019753$ 。

参 考 文 献

- [1] Shuman, F. G., Monthly Weather Review, **85** (1957), 357—361.
[2] 顾震潮, 气象学报, **28** (1957), 319—323.
[3] Miyakoda, K., Jour. Meteo. Soc. of Japan, **37** (1959), 10—21.

SOME OPINION FOR CONSIDERING FRICTIONAL TERM AND SMOOTHING PROCESS IN THE BAROTROPIC VORTICITY EQUATION

CHANG WOU-KOE

(*Institute of Computational Technique, Academia Sinica*)

ABSTRACT

First of all, this paper discusses how to choose smoothing coefficient in accordance with the grid size of space. Secondly we study the influence on the solution of the differential equation by adding frictional term in the vorticity equation, and then show how to choose suitable frictional coefficient in this case. Thirdly we discuss the influence for computational stability of the finite difference scheme after adding frictional term in the vorticity equation. It is shown that the computation is stable, if taking the frictional term in the $(n-1)$ time layer in the normal centered time difference scheme. If taking the frictional term in the n time layer, then the computation of the difference scheme is unstable. At the same time, the time forward difference scheme may be stable also after adding frictional term, but the frictional coefficient required is then much larger. Finally, we discuss the relation between the smoothing process and frictional term for numerical prediction using the vorticity equation. From the viewpoint of computation, the two things are not equivalent. But we might determine suitable smoothing coefficient by comparing the smoothing process in a diffusion equation.