

二层模式中小地形对于气压跳跃形成的初步研究*

巢纪平 章光鋐 袁孝明

(中国科学院地球物理研究所) (中国科学技术大学)

提 要

本文应用一个两层密度不同的流体所组成的模式, 讨论了小地形对于气流的影响。由一维常定问题的解指出, 对于气流一定的上游条件, 山脉存在一临界高度; 山区气流的被扰状态, 决定于上游条件和山的高度。当上游状态中的弗罗德 (Froude) 数小于 1, 而山脉的高度等于临界高度时, 背风面将出现常定的“气压跳跃”。也由一维非常定的解, 研究了“气压跳跃”的形成过程。

一、引 言

小地形对于气流的流动有明显的影响, 这可以间接地从山区云系的分布看出。在山的背风面常常可以观测到有好几排箕状云, 在箕状云下面紧靠山处, 有时还可以观测到有强烈发展的积云。由于这种积云看上去好象绕水平轴在转动, 所以它称为旋转云 (rotor cloud)。目前观测已经肯定, 箕状云是由于气流的背风波动所造成, 而旋转云则由转子气流造成。

对于背风波的性质和形成条件已经有了不少研究(参见文献[1])。对于转子气流, 由于其中上升运动的剧烈性, 可以估计到这可能不是一个线性理论可以解决的问题。目前转子气流的形成机制虽然也有了好几种解释(参见文献[2]), 但问题远不如背风波研究得那么清楚。

有很多人都把转子气流的出现, 看成是类似于“水跃”的一种“气压跳跃”现象的伴随物^[2-5]。在这方面, Long^[4] 曾经对二层密度不同的层结流体中阻碍物背后“气压跳跃”发生的条件, 进行过详细的实验研究。实验表明, “气压跳跃”的出现, 与流体的弗罗德数、阻碍物的高度等有密切的关系。

在本文中, 我们将应用流体密度不同的二层模式对背风面“气压跳跃”的形成和发展过程作进一步的讨论。

二、两层模式的基本方程

注意到在转子气流出现时山区上空一般都存在一逆温层^[2], 为了数学上处理的方便, 我们把逆温层看成是二个密度各不相同的气团的分界面。设逆温层的高度为 $\eta(x)$; 上层空气的密度为 ρ_1 , 下层空气的密度为 ρ_2 ; 流体上界的高度为 \bar{H} , \bar{H} 是均一不变的; 山脉的

* 本文 1963 年 10 月 23 日收到。

高度为 $\delta(x)$ 。我們再把水平坐标轴 x 放在海平面上, 垂直坐标轴 z 与之正交, 指向上为正 (图 1)。

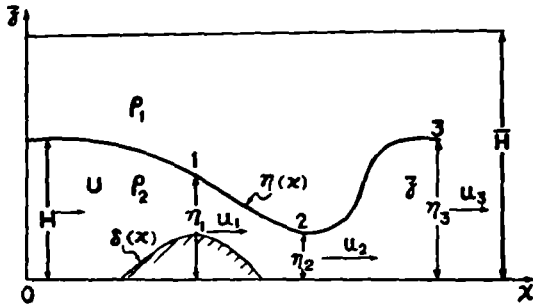


图 1

对于下层流体, 有运动方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (1)$$

和連續方程:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

式中 u 和 w 分别为水平速度和垂直速度。

設流体是靜力平衡的, 于是下层流体中任一高度为 z 处的压力为:

$$p = \bar{p} + \rho_1 g (\bar{H} - \eta) + \rho_2 g (\eta - z), \quad (3)$$

式中 \bar{p} 为 \bar{H} 高度上的气压, 是一个常量。

将 (3) 式代入 (1) 式后, 得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2} g \frac{\partial \eta}{\partial x} \equiv -g^* \frac{\partial \eta}{\partial x}. \quad (4)$$

从 δ 到 η 对 (2) 式积分, 得到

$$(\eta - \delta) \frac{\partial u}{\partial x} = w_\delta - w_\eta, \quad (5)$$

式中

$$w_\delta = u \frac{\partial \delta}{\partial x}, \quad w_\eta = u \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial t}, \quad (6)$$

在求 (5) 式时, 我們假定了 u 随高度是均一的。

将 (6) 式代入 (5) 式, 得到連續性方程为:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial u(\eta - \delta)}{\partial x} = 0. \quad (7)$$

由于山高 δ 和 g^* 都是已知的, 因此 (4)、(7) 两式組成了对 u 和 η 的閉合方程組。

三、常定問題

(1) 問題的解 关于常定問題, Long^[4], Schweitzer^[13] 都作过討論。在本节中我們用不同的方法作进一步的討論。我們先給出問題的显式解, 在这基础上引进临界山高, 再进一步討論背风面“气压跳跃”的强度和上游条件的关系。

对于常定問題, (4)、(7) 两式变成:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = -g^* \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\eta - \delta)u}{\partial x} = 0. \quad (9)$$

問題的边界条件取成

$$x = 0, \quad \delta = 0, \quad \eta = H, \quad u = U. \quad (10)$$

(9) 式对 x 积分, 应用条件 (10) 后, 得到

$$(\eta - \delta)u = HU, \quad (11)$$

同样, 由 (8) 式得到

$$\frac{1}{2}u^2 + g^*\eta = \frac{1}{2}U^2 + g^*H, \quad (12)$$

将 (11) 式代入 (12) 式消去 u 后, 得到

$$g^*(\eta - \delta)^3 + \left(g^*\delta - \frac{1}{2}U^2 - g^*H\right)(\eta - \delta)^2 + \frac{1}{2}U^2H^2 = 0. \quad (13)$$

引进无因次量:

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{H}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{H},$$

于是 (13) 式为

$$\bar{\xi}^3 + \left(\bar{\delta} - 1 - \frac{1}{2}F^2\right)\bar{\xi}^2 + \frac{1}{2}F^2 = 0, \quad (14)$$

式中

$$\bar{\xi} = \bar{\eta} - \bar{\delta}, \quad F = \frac{U}{\sqrt{g^*H}}, \quad (15)$$

其中 F 为弗罗德数, 是表征运动特征的一个重要的无因次量.

今将 (14) 式化为标准型, 为此引进

$$\phi = \bar{\xi} - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}F^2 - \bar{\delta}\right), \quad (16)$$

代入 (14) 式后, 得到

$$\phi^3 + P\phi + Q = 0, \quad (17)$$

其中

$$P = -\frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}F^2 - \bar{\delta}\right)^2, \quad Q = -\frac{2}{27}\left(1 + \frac{1}{2}F^2 - \bar{\delta}\right)^3 + \frac{1}{2}F^2. \quad (18)$$

方程 (17) 是一个三次的代数方程, 其根容易用标准方法求得, 即

$$\phi = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27}}}. \quad (19)$$

此即为问题的解.

(2) 临界高度 解 (19) 式的性质由判别式

$$\Delta = \frac{Q^2}{4} + \frac{P^3}{27} \cong 0 \quad (20)$$

决定. 或者将 P, Q 值代入后, 得

$$\Delta = \frac{1}{2}F^2 \left[\frac{1}{8}F^2 - \frac{1}{27}\left(1 + \frac{1}{2}F^2 - \bar{\delta}\right)^3 \right] \cong 0. \quad (21)$$

为了使这一判别式的物理意义更清楚, 我们将它改写成

$$\bar{\delta} \cong 1 + \frac{1}{2}F^2 - \frac{3}{2}\sqrt[3]{F^2} = \bar{\delta}_c. \quad (22)$$

Long^[4] 用不同的方法也给出过这个临界高度.

由(22)式表明,在現在的問題中存在一个临界山高 $\bar{\delta}_c$, 这临界山高是由上游条件,即由 F 所决定的。当上游条件給定后,解的性质将随实际山的高度而异。换言之,山区气流的被扰状态,除决定于上游条件外,也决定于山脉的高度。

临界山高与 F 的关系见图 2。由图 2 可見,当 F 增大时, $\bar{\delta}_c$ 变小,当 F 增大到 1 时, $\bar{\delta}_c$ 为零,当 F 再繼續增大时, $\bar{\delta}_c$ 也相应增加。

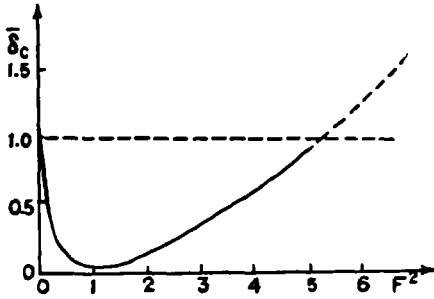


图 2

(3) 解的性质 上面指出,当 F 給定后,解的性质随(22)式而异。計算表明,当 $\bar{\delta} < \bar{\delta}_c$ 时,給定一个 $\bar{\delta}$ 值后,存在两个不同的 $\bar{\eta} > \bar{\delta}$ 的值;当 $\bar{\delta} = \bar{\delta}_c$ 时,有两个不同的 $\bar{\eta}$ 值,其中一个 $\bar{\eta} > \bar{\delta}$,另一个 $\bar{\eta} < \bar{\delta}$;当 $\bar{\delta} > \bar{\delta}_c$ 时,只有一个 $\bar{\eta} < \bar{\delta}$ 的根。由于 $\bar{\eta} < \bar{\delta}$ 表示逆温层的高度比山还低,这显然是沒有意义的解。这表明当 $\bar{\delta} > \bar{\delta}_c$ 时,問題不存在常定解。

当 $F = \sqrt{5.0}$ (相应的 $\bar{\delta}_c = 0.935$) 和 $F = \sqrt{0.1}$ (相应的 $\bar{\delta}_c = 0.355$) 时, $\bar{\eta}$ 和 $\bar{\delta}$ 的依賴关系分別见图 3a 和图 3b。

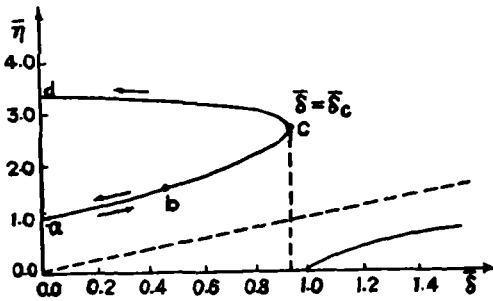


图 3a

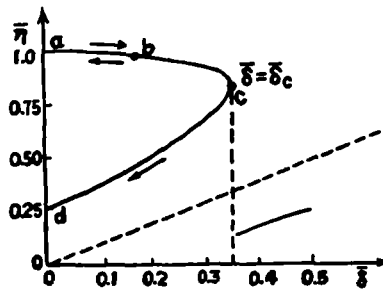


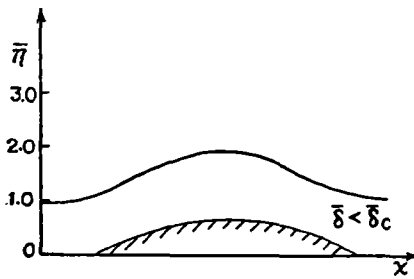
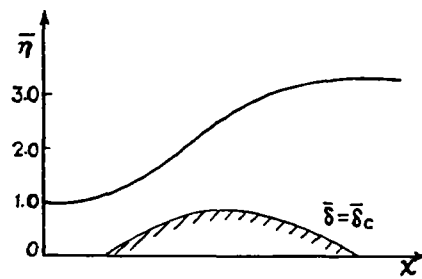
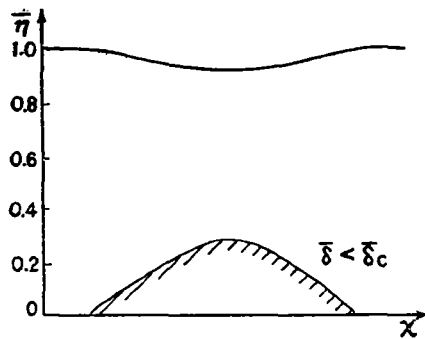
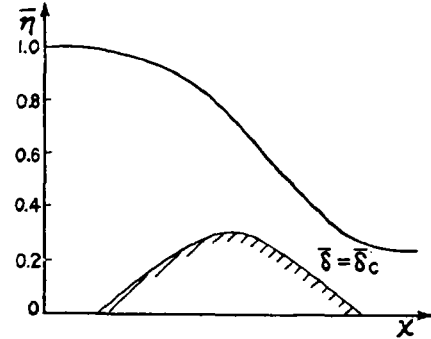
图 3b

由图 3a 和图 3b, 我們可以对逆温层高度在山区的变化作一分析。取山脉是对称的, 其最大高度 $\bar{\delta}_{max} < \bar{\delta}_c$ 。当 $F > 1$, 由图 3a 可見逆温层高度 $\bar{\eta}$ 在山前由 $\bar{\eta} = 1$ 起, 随着山的增高逆温层高度也相应增高。如果到山頂时, $\bar{\eta}$ 已增到图上的 b 点, 过山頂后, $\bar{\delta}$ 将减小。考虑到解的連續性, $\bar{\eta}$ 值将沿 ba 而减小, 到山脚 ($\bar{\delta} = 0$), $\bar{\eta}$ 又回到 a 点 ($\bar{\eta} = 1$)。可見, 在 $F > 1, \bar{\delta} < \bar{\delta}_c$ 的情况下, 受扰逆温层在山的兩側取对称分布(图 4a)。如果山的最大高度恰好等于临界高度, 即 $\bar{\delta} = \bar{\delta}_c$, 那末到山頂时, $\bar{\eta}$ 的值由 1 增到 c 点的最大值, 当过山后, $\bar{\eta}$ 的值将沿 cd 而繼續增大, 到山脚 $\bar{\eta}$ 达到最大值。这样, 受扰逆温层在山的兩側呈不对称分布(图 4b)。当 $F < 1$ 时, 也可以按图 3b 作类似的討論。这时, 当 $\bar{\delta} < \bar{\delta}_c$ 时, 逆温层在山的兩側也是对称的, 不过与 $F > 1$ 时不同, $\bar{\eta}$ 在山頂取最小值(图 4c); 当 $\bar{\delta} = \bar{\delta}_c$ 时, 逆温层的高度在过山后将繼續下降, 一直到山脚达到最小值(图 4d)。

这一計算結果的可靠性, 不难从 Long^[4,5] 的實驗結果中得到定性的驗證。

(4) “气压跳跃”的形成条件和强度 結合(8), (9) 两式, 可以得到

$$\left(1 - \frac{g^*(\eta - \delta)}{u^2}\right) \frac{d\eta}{dx} = \frac{d\delta}{dx} \tag{23}$$

图 4a $F = \sqrt{5.0}$, $\delta_c = 0.935$ 图 4b $F = \sqrt{5.0}$, $\delta_c = 0.935$ 图 4c $F = \sqrt{0.1}$, $\delta_c = 0.355$ 图 4d $F = \sqrt{0.1}$, $\delta_c = 0.355$

由此式容易看出，当 $u > \sqrt{g^*(\eta - \delta)}$ 时， η 将随 δ 的增高而增高；当 $u < \sqrt{g^*(\eta - \delta)}$ 时，则 η 将随 δ 的增高而减小。同时也可以看出，只有在山顶 $\left(\frac{d\delta}{dx} = 0\right)$ ，气流的速度 u 才能达到它的临界值 $\sqrt{g^*(\eta - \delta)}$ 。显然，如果山的高度 δ ，达到某一临界高度 δ_c 后，使得在山顶的气流有 $u = \sqrt{g^*(\eta - \delta)}$ ，那么本来在山的向风面逆温层高度是增高的，过山后仍然将继续增高，或者本来是降低的，过山后仍然将继续降低。

因此，如果山的高度 $\delta = \delta_c$ ，那么在上游本是次临界的气流，在过山时流速要不断增大，到山顶达到临界值；过山后由于高度继续降低，于是速度仍将继续增大，以致过山后形成超临界气流。显然，这就是图 4d 所表明的情況。

如果在图 1 所示中的 2 处，气流是超临界的，那么由于气流继续向前流动时，受摩擦等作用的影响，流速必将减小，最后又恢复到次临界流。这样在超临界流和次临界流之间的区域中必然将形成“气壓跳躍”。如果“气壓跳躍”的强度较大，那么在“气壓跳躍”中会出现轉子气流。

根据上面的分析，我们就可以得到結論，常定状态的“气壓跳躍”和轉子气流出现的条件有二：一是上游的弗罗德数 F 必须小于 1；一是山的高度必须达到临界高度 δ_c 。

Kuettner^[2] 认为，这种与“水跃”相似的理论虽然是轉子气流的一个很好的解释，但是也有不足之处。他指出，在这种情况下“气壓跳躍”可能到达的高度 η （图 1 中 η_3 ）要低于山顶逆温层的高度（图 1 中 η_1 ），而观测却表明，在一般情况下，旋轉云顶的高度总要比山

頂“焚风墙”云(Föhn wall)的高度来得高。为了使得旋轉云的高度增大到超过“焚风墙”云的高度,于是他提出需要在原来的理論中考虑到“气压跳跃”区域中由于湍流的发展所造成的該处逆温強度的減弱效应。

我們指出, Kuettner 的意見并不完全正确。因为即使从上面这种簡單的“气压跳跃”理論出发,也并不总是 $\bar{\eta}_3 < \bar{\eta}_1$ 的。事实上,根据“水跃”理論^[6],容易求得跳跃前后的高度比为

$$\left(\frac{\bar{\eta}_1}{\bar{\eta}_2}\right)^2 + \left(\frac{\bar{\eta}_3}{\bar{\eta}_2}\right) - 2F_2^2 = 0, \quad (24)$$

式中 $F_2^2 = \frac{u_2^2}{g^* \bar{\eta}_2}$ 。由此得到

$$\bar{\eta}_3 = -\frac{1}{2} \bar{\eta}_2 + \sqrt{\frac{1}{4} + 2F_2^2 \cdot \bar{\eta}_2}, \quad (25)$$

或者改写成

$$\bar{\eta}_3 = -\frac{1}{2} \bar{\eta}_2 + \sqrt{\frac{1}{4} \bar{\eta}_2^2 + \frac{2F_0^2}{\bar{\eta}_2}}. \quad (26)$$

由(26)式,在气压跳跃能够发生的参数区域中($F_0 < 1$, $\delta = \delta_c(F_0)$), $\bar{\eta}_2$ 的值可以

由問題的解(19)式算出。因此 $\bar{\eta}_3$ 的值可以按上游条件算出(图5中实綫)。同时 $\bar{\eta}_1$ 的值也可以算出来(图5中虚綫)。由图5可以看出,只有在 $F_0 < 0.4$ 时,才有 $\bar{\eta}_3 < \bar{\eta}_1$, 而当 $F_0 > 0.4$ 后, $\bar{\eta}_3 > \bar{\eta}_1$ 。因此看来,即使上面这种簡單的“气压跳跃”理論也可以在一定程度上解释轉子气流的观测事实。Kuettner 之所以得到 $\bar{\eta}_3 < \bar{\eta}_1$ 的結論,是因为他没有直接分析問題的解,而认为 $F_2 \gg 1$, 因而由(25)式得到的近似式

$$\bar{\eta}_3 \approx \sqrt{2F_2} \bar{\eta}_2$$

出发来作計算。事实上,在“气压跳跃”能够出現的情况下, F_2 并不总是很大的。

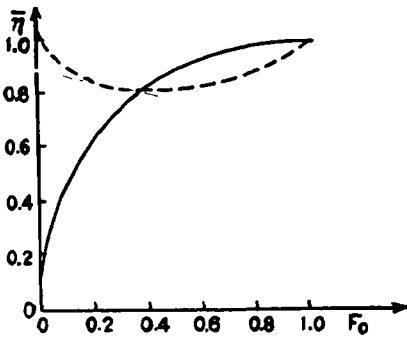


图 5

四、非常定問題

由于在 $\delta > \delta_c$ 的情况下問題不存在常定解,同时由于常定解所要求的“气压跳跃”形成的条件也太強,在实际情况下很难經常成立,因此我們在本节中进一步研究非常定解。

为了方便,用 $\eta' = \eta - H$ 来代替(4), (7)两式中的 η 。这样我們就有下列方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -g^* \frac{\partial \eta'}{\partial x}, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial [u(H + \eta - \delta)]}{\partial x} = 0. \quad (28)$$

引進無因次量：

$$\bar{x} = \frac{x}{H}, \quad \bar{t} = \frac{t}{\sqrt{\frac{H}{g^*}}}, \quad \bar{\delta} = \frac{\delta}{H},$$

$$\bar{\eta} = \frac{\eta}{H}, \quad \bar{u} = \frac{u}{\sqrt{g^*H}},$$

這樣就得到無因次方程：

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} = - \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{x}}, \quad (29)$$

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} [\bar{u}(1 - \bar{\delta} + \bar{\eta})] = 0. \quad (30)$$

由 (29)、(30) 兩式容易得到：

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} + \bar{c}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) (\bar{u} + 2\bar{c}) = - \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{x}}, \quad (31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} + (\bar{u} - \bar{c}) \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \right) (\bar{u} - 2\bar{c}) = - \frac{\partial \bar{\delta}}{\partial \bar{x}}, \quad (32)$$

式中

$$\bar{c}^2 = 1 - \bar{\delta} + \bar{\eta} \quad (33)$$

是逆溫層上波動的傳播速度。

方程 (31) 和 (32) 存在兩條特征綫

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)_{\text{I}} &= \bar{u} + \bar{c}, \\ \left(\frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)_{\text{II}} &= \bar{u} - \bar{c}. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

方程 (31)、(32) 可以用沿特征綫作差分的辦法來求解。相應的差分式為：

沿特征綫 I 有：

$$\bar{u} + 2\bar{c} = \bar{u}_1 + 2\bar{c}_1 - \frac{\Delta \bar{\delta}}{\Delta \bar{x}} \Delta t_{\text{I}}, \quad (35)$$

沿特征綫 II 有：

$$\bar{u} - 2\bar{c} = \bar{u}_2 - 2\bar{c}_2 - \frac{\Delta \bar{\delta}}{\Delta \bar{x}} \Delta t_{\text{II}}, \quad (36)$$

差分格式如圖 6 所示。這樣任意一點的 \bar{u} 和 \bar{c} 都可以用在它前一刻的量來表示，

$$\bar{u} = \frac{1}{2} (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) + (\bar{c}_1 - \bar{c}_2) - \frac{1}{2} (\Delta t_{\text{I}} + \Delta t_{\text{II}}) \frac{\Delta \bar{\delta}}{\Delta \bar{x}}, \quad (37)$$

$$\bar{c} = \frac{1}{4} (\bar{u}_1 - \bar{u}_2) + \frac{1}{2} (\bar{c}_1 + \bar{c}_2) - \frac{1}{4} (\Delta t_{\text{I}} - \Delta t_{\text{II}}) \frac{\Delta \bar{\delta}}{\Delta \bar{x}}. \quad (38)$$

在以下的各例計算中，取 $\bar{t} = 0$ 時， $\bar{\eta} = 0$ ，而 \bar{u} 則給以不同的值，但在 \bar{x} 方向是均勻的。

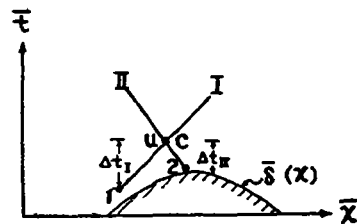


圖 6

图 7a 是 $\bar{u}_{i=0} = 0$ 的情况, 图 7b 是 $\bar{u}_{i=0} = 0.5$ 的情况, 图 7c 是 $\bar{u}_{i=0} = 1.0$ 的情况, 图 7d 是 $\bar{u}_{i=0} = 1.5$ 的情况.

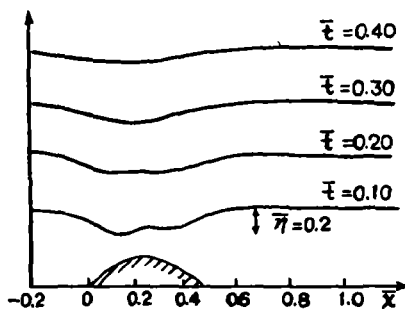


图 7a

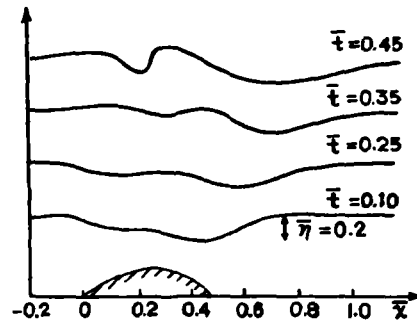


图 7b

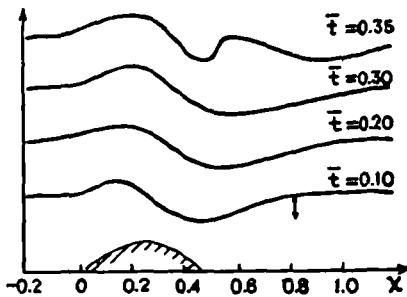


图 7c

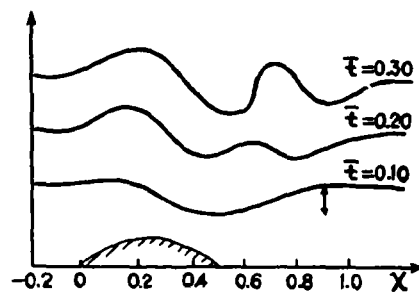


图 7d

比較这些例子, 我們可以得到下面几点結果:

(1) 当上游的风速強时 (图 7c, 7d), 过山后可以产生較強的下滑气流, 随着下滑气流的加强, 在背风面的某个地区, 逆温层将上跳, 最后形成不連續的分布.

(2) 上游的风速愈大, 背风面不連續跳跃的形成時間愈短. 如在 $\bar{u}_{i=0} = 0.5$ 时为 $\bar{i} = 0.45$, 在 $\bar{u}_{i=0} = 1.0$ 时为 $\bar{i} = 0.35$, $\bar{u}_{i=0} = 1.5$ 时为 $\bar{i} = 0.30$.

(3) 上游的风速愈大, 不連續跳跃的位置离山愈远.

从以上几个計算例子来看, 只要山有一定的高度, 上游风速有一定的强度, 背风面一般总是可以产生“跳跃”現象的. 由于我們求的是数值解, 因此“跳跃”产生的時間、地点和山高、气流强度、逆温层高度和强度間的定量关系在此尚不能給出. 但作为例子可以看出非綫性理論和綫性理論的結果是很不一样的, 由綫性理論是算不出这种不連續性的跳跃来的.

我們认为拟訂更合适的模式, 进一步分析地形对气流影响的非綫性效应, 是一个值得研究的題目.

参 考 文 献

- [1] 叶篤正, 气象学报, 27 (1956), 243—262.
- [2] Kuettner, J., *Aero. Revue*, 33 (1958), 208—214.
- [3] Schweitzer, H., *Arch. Meteor. Geophys. Biokl.*, 5 (1953), 350—371.

- [4] Long, R. R., *Tellus*, **6** (1954), 97—115.
[5] Bell, F. K., *Austral. J. Phys.*, **9**(1956), 373—386.
[6] 郎道, П. Д., 栗弗席茲, E. M., 連續介質力學, 第二冊, 人民教育出版社, 1960, 514—516.

A PRELIMINARY INVESTIGATION FOR THE FORMATION OF PRESSURE JUMP PRODUCED BY THE MOUNTAIN IN A TWO-LAYER MODEL

CHAO JIH-PING CHANG KUNG-KUAN

(*Institute of Geophysics and Meteorology, Academia Sinica*)

YAN SHIAO MING

(*The University of Science and Technology of China*)

ABSTRACT

Applying a two-layer model the pressure jump formed on the lee side is investigated for one dimensional stationary and non-stationary cases. The conditions for the formation of the stationary pressure jump are that the Froude number of the upwind side is smaller than unit and the height of mountain would be equal to a critical value.