

## 暖云降水微观物理机制的统计理论

周 秀 驥

(中国科学院地球物理研究所)

### 提 要

本文主要对暖云降水微观物理机制作了初步的实验与理论分析,提出了云滴增长的随机过程理论以及暖云降水微观机制模式,结果表明,由于湍流所引起的起伏现象以及湍流碰并对降水的形成有极为重要的作用。

### 一、前 言

暖云降水机制的研究对我国人工降水的工作具有重要意义,也是云雾物理中心的研究课题之一。在暖云系中,降水形成的微观过程基本上是凝结核凝增长成云滴,以后云滴相互碰并又形成雨滴。从物理学的角度来看,这两种过程的物理本质还是比较清楚的。然而在自然界中却由于每种过程都受到比较复杂的各种宏观条件的制约,问题就变复杂了。

综合地分析一下近代有关暖云微观物理机制的研究结果,可以说比较成熟的还只有 1948 年由 Langmuir<sup>[1]</sup> 及 Шишкин<sup>[2]</sup> 所提出的重力碰并理论。根据这一理论,水滴在云中和云滴碰并增长的方程是:

$$\rho \frac{dR}{dt} = \frac{E\omega}{4} \Delta u. \quad (1)$$

其中  $\rho$  是水的密度,  $R$  是水滴半径,  $E$  是捕获系数,  $\omega$  是云中含水量,  $\Delta u$  是水滴与云滴的相对速度。

在这个理论中,他们实际上首先假定液态水在空间是连续分布的,因此水滴半径的变化也是连续的,其次把物理量  $\omega$ ,  $\Delta u$  等都看成是有规则的无起伏的变量。

但是重力碰并理论在解释暖云降水机制时碰到不少困难。首先由于半径  $15\mu - 20\mu$  水滴的捕获系数几乎等于零,因此这些大水滴的出现就主要依赖于大气中巨核的存在<sup>[3,4]</sup>,然而这种巨核并不是经常存在的,此时就很难说明半径  $15\mu - 20\mu$  的水滴是如何形成的。其次无论在国内外,我们都多次观测到厚度 1—2 公里的薄云,并往往在 1 小时左右即能形成降水,而且水滴很大,而在浓积雨云(或雷雨云)中有时也能在半小时左右即形成降水,这些现象都是无法用重力碰并来合理解释的。

近代有 Л. М. Левин<sup>[5]</sup>, В. Г. Левич<sup>[6]</sup>, T. W. R. East 及 J. S. Marshall<sup>[7]</sup>, J. S. Saffman<sup>[8]</sup> 等人探讨过电荷以及湍流对半径  $15-20\mu$  云滴的形成的作用。但从我们下面的分析可以看出,这些理论都未能较好地解决重力碰并理论的困难。

显然矛盾是很大的,我们认为这主要是由于过去这些理论,还只是认识到了云中平均气流场以及平均湍流脉动的重要意义,但没有能真正考虑到另一个非常重要的基本因子

——湍流起伏。事实上我們观测到云中的实际情况是：

(1) 积云中湍流很强，层状云中也存在有湍流。

(2) 积云中湿度场，云滴浓度，云滴谱的空间分布，云滴荷电量以及电场等都是些统计起伏很显著的场，显然这些物理量的起伏都是湍流所引起的，特别是我們都有过这样的经验：当飞机从云中飞过时，它所产生的扰动也可以形成一些降水。而愈是在扰动剧烈的雷雨云中，这些场的起伏也就特别清楚。

(3) 根据许多观测表明，雨滴浓度一般只有  $10^2-10^3$  个/米<sup>3</sup>，而云滴浓度却有  $10^8-10^9$  个/米<sup>3</sup>。这就说明只要具有  $10^5-10^6$  分之一的云滴能够增长成雨滴，就能形成降水，显然降水形成也应该具有概率特征的过程。

这样，受湿度，云滴浓度，云滴谱，云滴荷电以及电场所控制的水滴增长过程实质上是一个随机过程，因而就必然要用随机过程的理论来处理。

这里必须指出，1954年 J. W. Telford<sup>[9]</sup> 所提出的碰并理论中，只是考虑到云滴增长的不连续性。但从以下分析可知，光是不连续性无法构成随机过程。因此 Telford 也就没有能够进一步明确而系统地发展这一工作。

## 二、云滴起伏增长的随机过程特征

(1) 我們首先讨论一羣水滴在起伏的多谱云系中碰并增长，而忽略水滴本身间的碰并<sup>1)</sup>。此时由于不同半径云滴在空间分布是无规则的，这碰并增长是起伏的，不但如此，水滴半径的变化是不连续的，因为显然水滴每与云滴碰并一次水滴体积的变化是一个间断不连续量——云滴的有限体积。但是由于云滴是多谱性的，因此水滴半径所能采取的数值必然是定义在一个连续区间上。这样我們所研究的这个碰并增长过程是一个定义在连续区域上而作不连续变化的随机过程。经过时间  $t$  后，水滴半径即具有概率分布的特征。我們下面推导一下，水滴分布密度  $f(v, t)$  (其中  $v$  是水滴体积) 所必须满足的随机方程。

根据 Колмогоров<sup>[10]</sup> 以及 Feller<sup>[11,12]</sup> 等人不连续变化的马尔科夫过程理论，随机量  $X$  在  $t = t_0$  时其值为  $x$ ，而到  $t (> t_0)$  时过渡到状态  $x \leq \xi$  的几率分布函数  $F(t, x; t, \xi)$ ，满足以下方程：

$$\frac{\partial F(t_0, x; t, \xi)}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\xi} A(t, y) dy F(t_0, x; t, y) + \int_{-\infty}^{\infty} A(t, y) p(t, y, \xi) \cdot dy F(t_0, x; t, y). \quad (2)$$

其中  $A(t, x)$  是随机量  $X$  在单位时间内发生变化的概率，而函数  $p(t, y, \xi)$  是表示随机量  $X(t)$  过渡到状态  $X \leq \xi$  的条件分布函数。其条件是在  $t = t_0$  时随机量  $X(t)$  发生跃变，而跃变前  $X(t) = y$ 。

很容易证明，我們所研究的碰并过程首先是一个马尔科夫过程，而且

$$A(t, v) = \int_0^{\infty} n_0 g(w, t) K(v, w, \Delta u) dw, \quad (3)$$

1) 我們可以认为这羣水滴的起始半径是相同的，由于以下的方程是线性的，就不难推广到水滴具有谱分布时的情况。

式中  $n_0$  是云滴濃度,  $g(w, t)$  是云滴譜分布, 而  $K(v, w, \Delta u)$  是碰并係數, 它具有形式:

$$K(v, w, \Delta u) = \pi \left( \sqrt[3]{\frac{3v}{4\pi}} + \sqrt[3]{\frac{3w}{4\pi}} \right)^2 E \Delta u, \quad (4)$$

而

$$p(t, v, \xi) = \begin{cases} \frac{\int_0^{\xi-v} g(w, t) K(v, w) dw}{\int_0^\infty g(w, t) K(v, w) dw}, & \xi \geq v, \\ 0, & \xi < v. \end{cases} \quad (5)$$

不难看出, (3), (5) 式中函數  $A(t, v)$  及  $p(t, v, \xi)$  滿足方程 (2) 的所有條件. 這樣分布密度  $f(v, t)$  滿足以下方程:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = - \int_0^\infty n_0 g(w, t) K(v, w) f(v, t) dw + \int_0^v n_0 g(v-y, t) K(y, v-y) \cdot f(t, y) dy. \quad (6)$$

根據 Feller<sup>[13]</sup> 理論方程具有以下一致收斂的級數解:

$$f(t, v) = \sum_{n=0}^\infty f_n(t, v), \quad (7)$$

而

$$f_n(t, v) = \exp \left\{ - \int_0^\infty n_0 g(t, w) K(v, w) dw dt \right\} \left[ \left\{ \int_0^v n_0 g(v-y, t) K(y, v-y) \cdot f_{n-1}(t, y) \exp \left( \int_0^\infty n_0 g(t, w) K(v, w) dw dt \right) dt + C_n \right\} \right]. \quad (8)$$

$C_n$  決定於  $f_n(t, v)$  的初始條件.

另外, 很容易找到方程 (6) 的差分近似解. 事實上若把云滴連續譜分布分割成間斷的分布, 而令體積為  $w_0$  的云滴數為  $n_1$ , 而體積  $2w_0$  的云滴數為  $n_2$ . 依此類推, 則水滴可能的狀態為  $v_1 = v^0 + w_0$ ;  $v_2 = v^0 + 2w_0$ ;  $v_3 = v^0 + 3w_0 \cdots$  等等. 這樣方程 (6) 即可換成以下綫性常微分方程組:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(v_1, t)}{\partial t} = - f(v_1, t) \sum_{j=1}^m n_j K(v_1, w_j, \Delta u), \\ \frac{\partial f(v_2, t)}{\partial t} = - f(v_2, t) \sum_{j=1}^m n_j K(v_2, w_j, \Delta u) + n_1 K(v_1, w_0, \Delta u) \cdot f(v_1, t), \\ \dots \dots \dots \\ \frac{\partial f(v_3, t)}{\partial t} = - f(v_3, t) \sum_{j=1}^m n_j K(v_3, w_j, \Delta u) + \sum_{j=1}^2 n_j K(v_j, jw_0, \Delta u) \cdot f(v_j, t), \\ \dots \dots \dots \end{cases} \quad (9)$$

不難計算出方程組的解.

假如我們不但考慮到云滴譜的混亂分布, 而且還考慮云滴濃度 ( $n_0$ ) 以及相對速度 ( $\Delta u$ )<sup>1)</sup> 與捕獲係數 ( $E$ )<sup>2)</sup> 的起伏, 則它們都是隨機函數. 而根據解 (7), (8) 或 (9) 可以計算

1) 以下將看出  $\Delta u$  的起伏是由湍流加速度所引起的.  
2)  $E$  的起伏可以由云滴荷電量、電場、湍流加速引起.

出函数  $f(v, t)$  的统计特征.

有时,为了简化计算,我们可以近似地把云看成是单谱的. 这时上面所研究的这组水滴体积变化所能采取的值只能是不连续的,即为云滴体积的整数倍. 根据定义,在不连续域而且变化也是不连续的马尔科夫过程理论,则水滴体积由初始值  $v_i$  过渡到值  $v_{i+m}$  的几率,  $p_{i,i+m}(t)$ , 满足下列方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_{i,i}}{\partial t} = -A_{ii}p_{ii}, \\ \frac{\partial p_{i,i+1}}{\partial t} = +A_{i,i+1}p_{ii} - A_{i+1,i+1}p_{i,i+1}, \\ \dots\dots\dots \\ \frac{\partial p_{i,i+2}}{\partial t} = A_{i+1,i+2}p_{i,i+1} - A_{i+2,i+2}p_{i,i+2}. \end{cases} \quad (10)$$

其普遍解具有形式

$$p_{i,i+R} = \sum_{r=0}^k \left\{ p_{i,i+r}(0) \sum_{l=r}^{k-1} \frac{\prod_{p=r}^{k-1} A_{i,p+i}}{\prod_{\substack{p=r \\ p \neq l}}^k (A_{i+p} - A_{l+k})} \right\} (e^{-A_{l+i}t} - e^{-A_{k+i}t}). \quad (11)$$

其中  $A_{kk} = A_{k,k+1} = \pi(R+r)^2 E n_0 \Delta u$ .

必须指出,这时起伏的形成实际上是单谱云滴荷电的混乱分布所引起的(在电碰并情况下),假如考虑由于相对速度  $\Delta u$ , 或云滴浓度  $n_0$  的起伏而形成的起伏增长,则还必须根据  $\Delta u$  及  $n_0$  的概率特征,而按(11)式计算  $p_{i,i+k}$  的概率特征. 在 Telford<sup>[10]</sup> 工作中并未意识到这点,而在不考虑电碰并情况下时,在(11)式中用平均浓度  $\bar{n}_0$  以及平均相对速度  $\overline{\Delta u}$  来计算  $p_{i,i+k}$ , 这实际上只是考虑了一部分的起伏增长,而这种起伏本质也决不是由水滴增长的不连续性所引起的.

(2) 对于水滴在云中凝结增长来说,其体积的变化只能看成是连续的,对于半径大于  $1\mu$  的水滴来说,其凝结增长方程<sup>[13]</sup>为:

$$\frac{dR^2}{dt} = \frac{2D}{\rho} (\Delta e). \quad (12)$$

式中  $\Delta e$  是云中水汽过饱和密度.

这样,由于湿度场起伏所引起的水滴起伏凝结增长,是一个定义在连续域而变化连续的随机过程. 而(12)式为一随机常微分方程.

此外,当水滴半径比所有云滴半径都大很多时,可以近似地把由于和云滴碰并而引起的水滴半径变化看成是连续的,而碰并增长满足方程(1). 由于云中含水量  $w$  以及相对速度  $\Delta u$  的起伏,该方程也是个随机方程.

对于单因子分析来说,上面二个方程具有普遍形式:

$$\frac{dX(t)}{dt} = M(X)T(t)Y(t). \quad (13)$$

式中  $Y(t)$  是已知的随机函数,  $M(X)$  与  $T(t)$  是  $t$  的已知函数,而  $X(t)$  是所求的随机函数.

根据随机函数理論<sup>[11]</sup>, 可知随机函数  $z(t)$ :

$$z(t) = \int_{x_0}^x \frac{dX}{M(X)} = \int_0^t T(s)Y(s)ds \quad (14)$$

的数学期望值为:

$$\alpha_z = \int_0^t T(s)\alpha_Y ds \quad (15)$$

而均方差值为:

$$\sigma_z^2 = \int_0^t \int_0^t \sigma_Y^2 H(t', t'') T(t') T(t'') dt' dt'' \quad (16)$$

式中  $\alpha_Y$  与  $\sigma_Y^2$  为随机函数  $Y(t)$  的数学期望及均方差值, 而  $H(t', t'')$  为相关函数. 因为一般在积云中考虑的水滴增长过程在一股垂直气流中进行可以认为  $H(t', t'') \sim 1$ . 这样若  $Y(t)$  具有正态分布:

$$G(Y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_Y} e^{-\frac{(Y-\alpha_Y)^2}{2\sigma_Y^2}}, \quad (17)$$

則量  $X$  具有以下正态分布:

$$f(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x M(X)} e^{-\frac{(\int_{x_0}^x \frac{dX}{M(X)} - \alpha_z)^2}{2\sigma_x^2}} \quad (18)$$

必須指出, 如果我們考虑云滴浓度以及相对速度起伏的共同作用, 則方程(1)即变成一个非綫性的随机常微分方程.

(3) 上面所探討的这些情况, 都沒有考虑到增长水滴的运动. 实际上由于湍流的结果, 水滴在云中的运动也是起伏的, 而在云中逗留的时间也是起伏的, 这种起伏, 实际上是扩散过程, 是一个定义在連續域上的連續位移的馬尔科夫过程. 复杂的是在水滴起伏运动的过程中还不断地有起伏凝結增长, 以及和云滴起伏碰并增长. 因此总的來說, 这是一个混合的馬尔科夫过程. Feller 曾討論过这种过程的普遍理論<sup>[11]</sup>. 根据这理論以及我們上面的討論, 这羣水滴在云中起伏运动, 而且起伏凝結及碰并, 經過时间  $t$  以后, 其分布密度满足以下方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\mathbf{r}, v, t)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}f) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{dv}{dt} f \right) &= - \int_0^\infty n_0 g(w, t) f(v, \mathbf{r}, t) K dw + \\ &+ \int_0^v n_0 g(v-y, t) f(y, \mathbf{r}, t) K dy. \end{aligned} \quad (19)$$

式中  $\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi R D \Delta e}{\rho}$  是凝結增长速率, 而  $\mathbf{v}$  是水滴运动速度  $\mathbf{v} = \mathbf{V} - \mathbf{w}(v)$ , 这里  $\mathbf{V}$  是气流速度, 是个起伏量, 而  $\mathbf{w}$  为水滴在重力加速度与湍流加速度場中的末速度.  $\mathbf{r}$  是空間坐标向量.

假定把碰并过程看成是連續变化过程, 則上式可以簡化为:

$$\frac{\partial f(v, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}f) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{dv}{dt} f \right) = 0, \quad (20)$$

而这时

$$\frac{dv}{dt} = \frac{4\pi RD\Delta e}{\rho} + \frac{\pi R^2 w E \Delta u}{\rho}$$

(4) 以上所討論的这些过程还只是一羣水滴在拉格朗日坐标系內的起伏增长, 其中忽略了水滴本身之間的碰并, 而在实际云中, 应该把云滴系統看成一个整体. 这时, 云滴增长的随机动力方程問題还有待于进一步探討. 至于平均滴譜动力方程, 则不难用相字空間的概念推导得出, 其普遍形式为:

$$\frac{\partial n(v, \mathbf{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(\mathbf{v}, n) + \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{dv}{dt} n \right) = \int_0^v n(v - v', t) n(v', t) \times \\ \times K(v', v - v', \Delta u) dv' - \int_0^\infty n(v, t) n(v', t) K(w, v', \Delta u) dv', \quad (21)$$

式中符号的表示見公式(19).

因此从上面結果来看, 云滴起伏增长的过程是一个复杂的問題. 我們利用这些結果作了一些单因子的分析与討論, 下面即談一下初步結果.

### 三、暖云中云滴增长机制的初步探討

根据很多工作<sup>[15,16]</sup>結果可知, 由小核长成半径  $1\mu$  的云滴的过程一般很迅速(只要成云的条件已具备). 我們下面就来看一下在这些  $1\mu$  左右的云滴要增长成雨滴而形成降水的过程中, 那些机制是最重要的.

(1) 起伏凝結增长. 对于半径  $R \geq 1\mu$  云滴的凝結增长, 有下列方程:

$$R \frac{dR}{dt} = \frac{D}{\rho} \Delta e. \quad (22)$$

根据上述理論, 如果云中过饱和水汽密度是随机函数而滿足正态分布, 則云滴半径也是随机函数, 而其分布密度为:

$$f(R) = \frac{R\rho}{\sqrt{2\pi\sigma_{\Delta e}Dt}} \exp \left[ -\frac{\left( \frac{R^2\rho}{2D} - \alpha_{\Delta e}t \right)^2}{2\sigma_{\Delta e}^2 t^2} \right]. \quad (23)$$

有人试图利用我們这一結果探討过云滴譜的形成, 但显然整个云滴譜的形成, 远非仅仅从凝結就能得到解释, 因此也不难看出, 在那种工作中很多参数的选择是非常缺乏根据的.

我們根据公式(23)計算了当  $\alpha_{\Delta e} = 0.0005 \times 10^{-6}$  克/厘米<sup>3</sup>, 而  $\sigma_{\Delta e} = \frac{\alpha_{\Delta e}}{3}$  时, 水滴經過  $t = 1000$  秒, 2000 秒以及 3600 秒以后凝結增长而形成的譜(見图1). 图2上是对  $\sigma_{\Delta e} = \alpha_{\Delta e}$  时計算所得結果. 这时如果不考虑湿度場起伏, 則在  $t = 1000$  秒, 2000 秒及 3600 秒时, 只能出現半径各等于  $4.5\mu$ ,  $6.3\mu$  及  $8.5\mu$  的水滴, 但当考虑了起伏以后, 即形成一部分大水滴. 从图上总的看来, 假如取大气小凝結核平均数有  $10^4$  个/厘米<sup>3</sup><sup>[19]</sup>, 則經過 1000 秒就能形成浓度等于 100 个/厘米<sup>3</sup>, 而半径等于  $7-8\mu$  左右的大云滴, 而經過 2000 秒以后則有 100 个/厘米<sup>3</sup> 半径  $10-11\mu$  左右的云滴. 而半径  $4-5\mu$  云滴譜度一般可达  $10^3$  个/厘米<sup>3</sup>. 此外, 根据我們的結果可見, 要形成半径大于  $15\mu$  的大云滴, 单靠起伏凝結增长的可能性还是很小的. 必須探討其他机制.

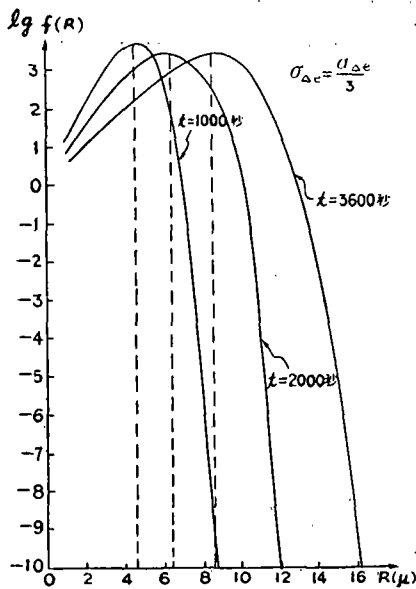


图 1 在起伏湿度場中的凝結滴譜

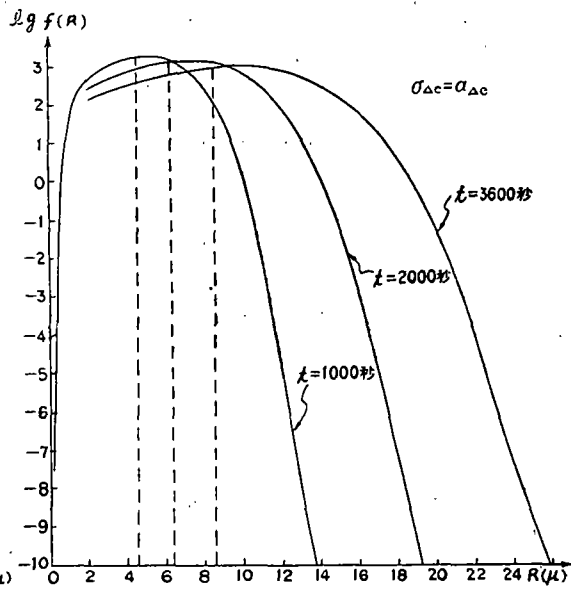


图 2 在起伏場中的凝結滴譜

(2) 从苏联 Л. М. Левин<sup>[5]</sup> 关于带电水滴捕获系数的理論計算, 以及本文作者关于带电水滴捕获系数的实验測量結果可<sup>[19]</sup> 知, 重力电碰并可能对半径 15—20 $\mu$  的云滴的形成有作用。为此我們曾經利用上述統計理論进行了带电云滴起伏重力电碰并增长速率<sup>[19]</sup> 的計算。我們根据实际云滴荷电观测資料, 令云滴平均荷电量与其半径成正比:

$$\bar{q} = K'R,$$

而把云分成三类: a)  $K' = 10^{-4}$ , 中等电化云(一般是层云、层积云), б)  $K' = 5 \cdot 10^{-4}$ , 強电化云(浓积云, 乃至积雨云), в)  $K' = 10^{-3}$ , 特強电化云(一般是雷雨云)。我們計算所采用的起始条件約相当于上述起伏凝結增长而形成的云滴譜。結果表明, 在中等电化云中一般要有 10 小时左右才能在重力电碰并下形成浓度 10 个/厘米<sup>3</sup>、半径为 15—20 $\mu$  的大云滴, 而在強电化云中, 需要 1 小时左右。在特強带电云中則只需要 5 分鐘左右即能形成。因此对中性电化云, 重力碰并对半径 15—20 $\mu$  的大云滴形成来說是不重要的。

但是根据我們最近关于带电水滴的湍流电碰并时的捕获系数計算結果<sup>[20]</sup> 来看, 在云中具有湍流而其单位質量的湍流耗散若能达到  $\epsilon = 10^2$  厘米<sup>2</sup>/秒<sup>3</sup> 以及  $\epsilon = 10^3$  厘米<sup>2</sup>/秒<sup>3</sup> 时, 半径 2—20 $\mu$  云滴, 在湍流电碰并作用下, 不論是中性电化、強电化或是特強电化, 它們的捕获系数都比重力电碰并下特強电化云滴的捕获系数还稍大一些。这样, 在湍流电碰并作用下, 即使云是中性电化或是強电化也只要在 5 分鐘左右即能出現半径为 15—20 $\mu$  浓度到 10 个/厘米<sup>3</sup> 的大云滴。

因此对于半径 1—20 $\mu$  的云滴增长和形成来說起伏凝結与湍流电碰并共同起着重要的作用。而完全可以在 10—30 分鐘內形成半径为 20 $\mu$  左右、浓度为 10 个/厘米<sup>3</sup> 的大云滴(視湍流強度而定)。

(3) 我們进一步探討浓度 10 个/厘米<sup>3</sup> 的半径 15—20 $\mu$  的大云滴如何能迅速增长成雨滴。顾震潮<sup>[22]</sup> 曾証明过半径 12.5 $\mu$  的水滴在云滴浓度起伏下重力碰并而迅速形成降水。

但另一方面湍流加速度起伏的存在,也必通过水滴与云滴的相对速度而影响云滴的增长。因此显然湍流不只有 B. Г. Левин<sup>[6]</sup> 以及 Saffman<sup>[8]</sup> 等人所提出的平均湍流加速度的效应,而且还必须考虑到湍流加速度起伏的效应。若考虑一羣水滴在重力加速度和湍流起伏加速度(只考虑垂直方向)共同作用下和云滴碰并增长,则其增长方程为:

$$\frac{dR}{dt} = \frac{Eq}{4} [f(R) - f(r)]w. \tag{24}$$

式中  $f(R) = \frac{u(R)}{g}$ ,  $f(r) = \frac{u(r)}{g}$ , 而  $u(R)$ ,  $u(r)$  各为水滴及云滴在重力场  $g$  中的自由下落末速度。若假定加速度满足正态分布:

$$A(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_w} e^{-\frac{(w-g)^2}{2\sigma_w^2}}. \tag{25}$$

则根据上述统计理论,经过时间  $t$  以后水滴的分布密度为:

$$f(R) = \frac{4g}{Eq\sqrt{2\pi t}\sigma_w[u_R - u_2]} e^{-\frac{\left[\frac{4}{Eq}\int_{R_0}^R \frac{dR}{u_R - u_2} - t\right]^2 \left(\frac{g^2}{\sigma_w^2}\right)}{2t^3}}. \tag{26}$$

式中  $\sigma_w$  显然约等于平均湍流加速度(垂直方向)。我们取以下数值作为计算的起始条件:

- 1,  $t = 0, R = R_0 = 12.6\mu$ , 云中含水重 1 克/米<sup>3</sup>, 而捕获系数  $E = 0.5$ .
- 2,  $t = 0, R_0 = 20\mu$ , 云中含水量 1 克/米<sup>3</sup>, 而  $E = 0.5$ .

在图 3 中是当平均湍流加速度  $\sigma_w = g/3$  时经过 2000 秒及 4000 秒所形成的滴谱, 而图 4 中是当  $\sigma_w = g$  时形成的滴谱。而在图 5 中则是当  $R_0 = 20\mu$ , 而  $\sigma_w = g$  经过

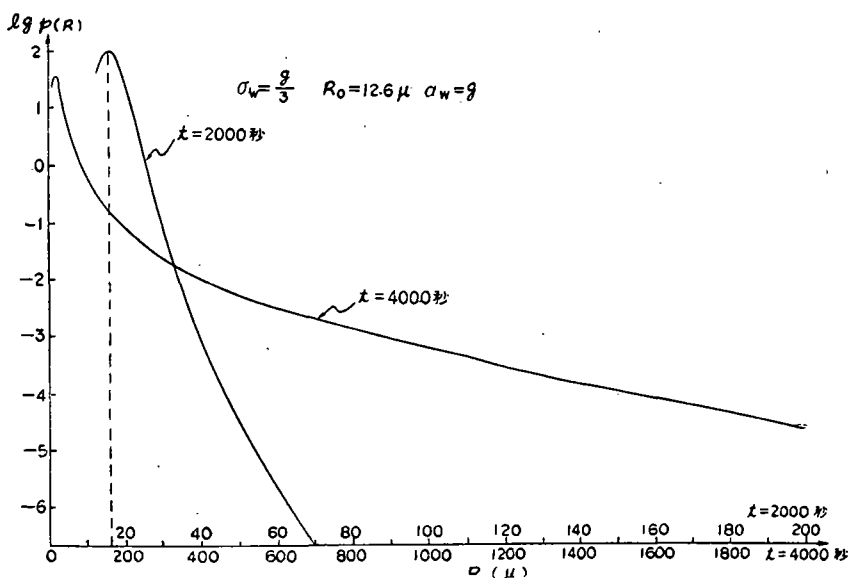


图 3 在湍流加速度作用下云滴起伏碰并增长谱



$t = 1000$  秒后所形成的滴譜，以及当  $R_0 = 20\mu$ ,  $\sigma_w = g/3$  經過 2000 秒后所形成的滴譜。从这些結果来看，若水滴的浓度为 10 个/厘米，則由于湍流加速度起伏結果約在半小時左右即可以形成降水以及暴雨(視湍流強度而定)，而这作用和云滴浓度起伏的作用可以相比較，或者更大一些。

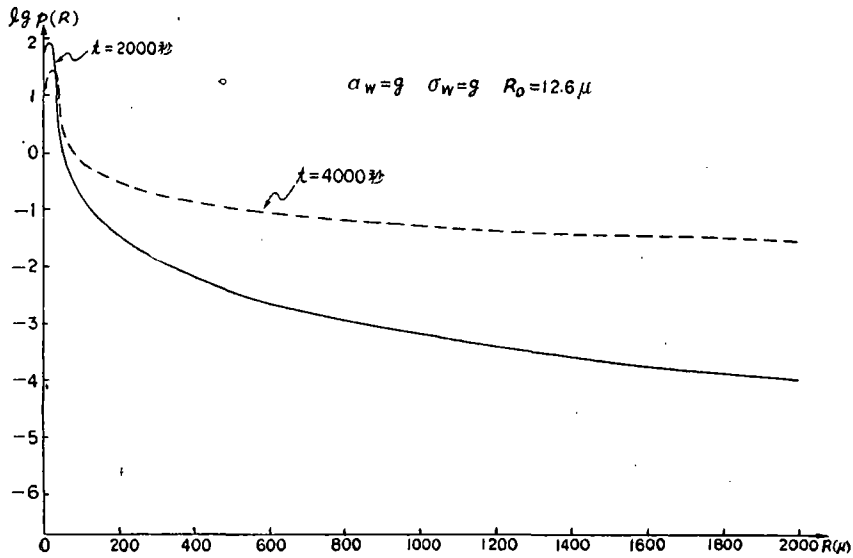


图 4 在湍流加速度作用下云滴起伏碰并增长譜

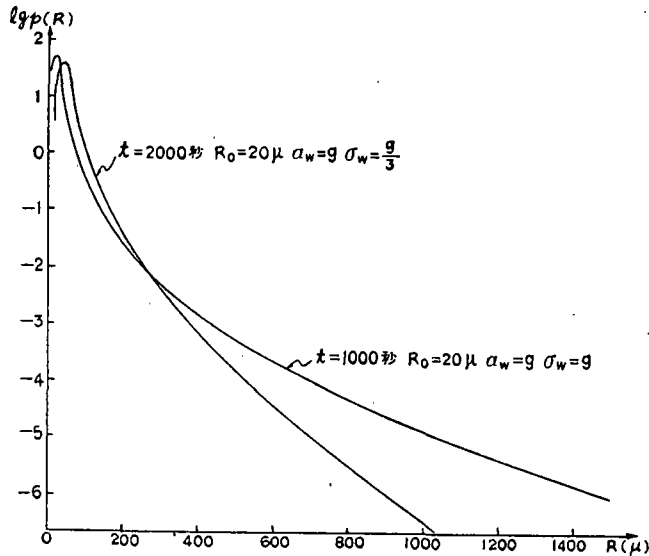
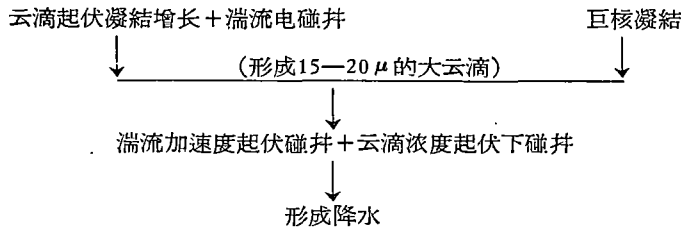


图 5 在湍流加速度作用下云滴起伏碰并增长譜

#### 四、結 束 語

根据上面这些結果来看，我們认为在云滴增长不同阶段，有下列几种机制起很重要作用，必須考虑。



根据該模式只要湍流起伏足够強(一般在积雨中是完全可以保証的,而由薄云降水来看大气条件有时也是很很不安)完全可能在1小时以内由半径 $1\mu$ 的小云滴发展而形成暴雨。

必須指出,本文所考慮到的問題还只是綫性的单因子分析。而实际大气中从上面看来云滴起伏增长是非綫性的,而且各种因子是相互制約,其中也可能有負反饋作用,例如降水形成大水滴的出現却加強了云滴对云中气流的拖带作用,而耗損云中湍流能,使它減弱,而減弱起伏現象。因此还必須进一步的发展非綫性随机过程理論。此外,上述理論中所做的一些假定还需要进一步用实际資料来驗証。

但从我們初步結果来看,云中湍流以及起伏的規律是暖云降水微观机制中一个极其重要的因子。宏观条件除了通过平均气流場外,还通过湍流和微观过程紧密的相互制約。随机理論的应用为暖云降水机制的探討提供了新的綫索,值得今后进一步地发展。除此以外,对冷云或者混合云来看,起伏現象未必不是重要的,这也值得我們很好地注意。

### 参 考 文 献

- [1] Langmuir, I., The production of rain by a chainreaction in cumulus clouds at temperatures above freezing, *J. Met.*, **5** (1948), 175.
- [2] Шишкин, Н. С., Облака, осадки, и грозное электричество, 1954.
- [3] Woodcock, A. H., Condensation nuclei and precipitation, *J. Met.*, **7** (1950) 161.
- [4] Woodcock, A. H., Atmospheric salt particles and raindrops, *J. Met.*, **9** (1952) 200.
- [5] Левин, Л. М., Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей, 1961.
- [6] Левич, В. Г., Физико-химическая гидродинамика, 1959.
- [7] East, T. W. R., & Marshall J. S. Turbulence in clouds as a factor in precipitation, *Q. J. R. M. S.*, **80** (1954) 343.
- [8] Saffman, J. S., Turner, I. S., On the collision of drops in turbulent clouds, *J. fluid Mech.* T (1) part (I) (1956).
- [9] Telford, J. W., A new aspect of coalescence, *J. Met.*, **12** (1955), 436.
- [10] Колмогоров, А. Н., Об аналитических методах в теории вероятностей, *Успехи. матем. наук*, **5** (1938).
- [11] Feller, W., Zur Theorie der stochastischen Prozesse, *Math. Ann.*, **113** (1936) 113—160.
- [12] Feller, W., On the integro-differential equations of purely discontinuous Markoff process, *Trans. Am. Math. Soc.*, **48** (1946) 488—515, **58** (1945) 474.
- [13] Хргиан, А. Х., Физика атмосферы, 1953.
- [14] Пугачев, В. С., Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, 1957.
- [15] Mason, B. J., Physics of clouds, 1957.
- [16] Howell, W. E., The growth of cloud drops in uniformly cooled air, *J. Met.*, **6** (1949), 134—149.
- [17] Mordy, W. A., Composition of the growth by condensation of a population of clouds droplet, *Tellus*, **11** (1959), No. 1.
- [18] Грабовский, Р. И., Атмосферные ядра конденсации, 1956.
- [19] 周秀麟, 关于暖云中电荷对云滴碰并的影响問題, 1961.

[20] 周秀驥、秦 瑜，碰併對雲滴電化的影響。“雲霧降水微結構的一些理論問題”，科學出版社，1963。

[21] 顧震潮，雲滴濃度起伏條件下重力碰併造成的雲滴生長，氣象學報，32 (1962)。

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МИКРОФИЗИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ ОБРАЗОВАНИЯ ОСАДКОВ ИЗ ТЕПЛЫХ ОБЛАКОВ

Чжоу Сю-цзи

(Институт Геофизики АН КНР)

Резюме

На основе теории случайных процессов рассмотрены некоторые микрофизические процессы укрупнения капель в теплых облаках. Рост облачных капель обладает флуктуационным характером. При этом показано, что кроме средних воздушных потоков, турбулентность в облаках играет существенную роль в укрупнении облачных капель. Образование облачных капель радиусом  $15 \mu$  главным образом определяется флуктуационной конденсацией и турбулентной электрической коагуляцией при отсутствии гигантских ядер. В дальнейшем укрупнение облачных капель до размеров дождевых капель происходит в результате совместного действия флуктуации водности облаков и турбулентного ускорения. Наконец, предложена модель, которая позволяет объяснить быстрое образование осадков из малых кучевых облаков и мощных дождевых кучевых облаков при надлежащих условиях.