第 32 卷 第 3 期　　气 象 学 报　　Vol. 32, No. 3
1962 年 9 月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　Sept., 1962

通　訊

对“李雅普諾夫运动稳定性理論在气象学中的应用”一文的一点意見*

最近，巢紀平同志在“李雅普諾夫运动稳定性理論在气象学中的应用”[1]一文中，以綫性两层模式为例，用李雅普諾夫第一方法討論了斜压扰动的稳定性問題(見原文第四节)，由于他在某些計算細节上的錯誤，因而所得到的关于斜压扰动是否发展的判据是不正确的。

下面我們給出正确的計算結果。

按原文中 (4.2) 式，将高度扰动 φ' 与厚度扰动 h' 用傅氏級数展开，便得到对应于 φ' 与 h' 的偏微分方程組(4.1)的四个常微分方程：

$$\frac{d\psi_{sk}}{dt} = \sum_{\sigma=1}^{4} p_{s\sigma}\psi_{\sigma k} \quad (s = 1, 2, 3, 4), \tag{4.3}$$

式中 $p_{12} = -p_{21} = \left(\frac{\beta}{k} - kU\right)$, $p_{34} = -p_{43} = -kU$, $p_{23} = -p_{14} = \bar{A}^2 kU_T$,

$p_{32} = -p_{41} = -k\frac{k^2-\mu^2}{k^2+\mu^2}U_T$, $p_{13} = p_{31} = p_{11} = p_{22} = p_{24} = p_{42} = p_{33} = p_{44} = 0$.

所用符号的意义同文献 [1].

对应于(4.3)式的特征方程是：

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & p_{12} & 0 & -p_{23} \\ -p_{12} & -\lambda & p_{23} & 0 \\ 0 & p_{32} & -\lambda & p_{34} \\ -p_{32} & 0 & -p_{34} & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + p_2\lambda^2 + p_4 = 0.$$

这里，$p_2 = p_{12}^2 + p_{34}^2 - 2p_{23}p_{32} > 0$[1]，

$$p_4 = (p_{12}p_{34} + p_{23}p_{32})^2 > 0.$$

四个特征根是：

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{-p_2 + 2\sqrt{p_4}} \pm i\sqrt{p_2 + 2\sqrt{p_4}}\right],$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{2}\left[-\sqrt{-p_2 + 2\sqrt{p_4}} \pm i\sqrt{p_2 + 2\sqrt{p_4}}\right].$$

由此，得到决定李雅普諾夫意义下的运动稳定性的判据：

$$p_2 \gtrless 2\sqrt{p_4} \quad \begin{matrix}\text{稳　定} \\ \text{不稳定}\end{matrix},$$

* 本文 1962 年 6 月 5 日收到。

1) 一般說来，$p_2>0$ 的条件，在大气中恒能得到滿足。

或：

$$(p_{12}-p_{34})^2 \gtrless 4p_{23}p_{32} \quad \begin{matrix}\text{稳 定}\\ \text{不稳定.}\end{matrix}$$

将 p_{12}, p_{34}, p_{23}, p_{32} 的表示式代入，便得：

$$\left(\frac{\beta}{2k^2}\right)^2 \gtrless \bar{A}^2 U_T^2 \frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2} \quad \begin{matrix}\text{稳 定}\\ \text{不稳定;}\end{matrix}$$

或：

$$\left(\frac{\beta L^2}{4\pi^2}\right)^2 \gtrless 4\bar{A}^2 U_T^2 \frac{L^2-L_S^2}{L^2+L_S^2} \quad \begin{matrix}\text{稳 定}\\ \text{不稳定.}\end{matrix} \quad \left(L=\frac{2\pi}{k};\quad L_S=\frac{2\pi}{\mu}\right)$$

这个判据与原文[1] 中的 (4.6) 式与 (4.7) 式不同，但却与湯姆逊和菲耶托夫特的結果[2,3]相当一致。

从前面的判据式里，可以看到，因 U_T^2 与 $\bar{A}^2$ 都是正数，所以扰动稳定的充分条件是：$\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}\leqslant 0$. 因 $k^2>0$，則 $\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}<0$ 的条件与 $k^2>|\mu^2|$ 等价. 这意味着必須要有較为稳定的温度层結（即小的温度梯度），且斜压扰动的稳定度（不稳定度）随着温度递減率的減小（增加）而增加。从能量观点考虑，这是很容易理解的。

以下用李雅普諾夫第二方法証明这一点。

作李雅普諾夫函数 V（据张炳根口述写出）为：

$$V=-\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}(\psi_{1K}^2+\psi_{2K}^2)+\bar{A}^2(\psi_{3K}^2+\psi_{4K}^2).$$

求其对 t 的全导数，利用(4.3)式，并将諸系数 $p_{s\sigma}$ 的値代入，則得

$$\frac{dV}{dt}=-\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}2\psi_{1K}\psi_{2K}(p_{12}+p_{21})+2\psi_{1K}\psi_{4K}\left(-\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}p_{14}+\bar{A}^2p_{41}\right)+$$
$$+2\psi_{2K}\psi_{3K}\left(-\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}p_{23}+\bar{A}^2p_{32}\right)+2\bar{A}^2\psi_{3K}\psi_{4K}(p_{34}+p_{43})\equiv 0.$$

如果 $\frac{\mu^2-k^2}{\mu^2+k^2}\leqslant 0$ 的条件得到滿足，則 V 是定正函数，而其全导数恆等于零；于是，根据李雅普諾夫关于运动稳定性的第一定理可知，运动是稳定的。

如果取 $U(y, t)$ 与 $U_T(y, t)$，那么也可以应用运动稳定性理論的成果去处理同一問題，只是这时对应于(4.1)式的是四个变系数的常微分方程（将 y 当作参数），不能用李雅普諾夫第一方法来討論；但我們总还可以使用第二方法或运动稳定性理論中某些最新发現的定理，例如求解的有界値确定扰动稳定的充分条件。最后指出：大气大型扰动的实际状况是：初始扰动往往不是足够的小，因而超出了李雅普諾夫的运动稳定性理論所研究的范围，于是运用現代理論成果去研究扰动的全局稳定性問題，也将被提到日程上来。

由此看来，运用运动稳定性理論这样一个強有力的現代工具去研究气象学中的某些問題是很有前途的。

秦曾灏
（山东海洋学院）

参 考 文 献

[1] 巢紀平：李雅普諾夫运动稳定性理論在气象学中的应用．动力气象学論文集，科学出版社，1961 年。
[2] Thompson P. D. *Q. J. Roy. Met. Soc.* **79** (1953), 339.
[3] Fjørtoft. R., Compendium of Meteorology. *Boston. Amer. Met. Soc.* 1951.