第30卷 第4期　　气象学报　　Vol. 30, No. 4
1959年11月　　ACTA METEOROLOGICA SINICA　　November, 1959

# 一个与中长期預报有关的复合型方程的定解問題*

中国科学院數学研究所分析室偏微組

**提　　要**

本文研究了渦度方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha(\theta)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Delta z+\beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0$$

的始値問題，其中 $\Delta=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}$. 方法是先用特征綫法将問題化为积分方程，然后再对积分方程施行逐次迫近，从而証明了問題的适定性，并提供了求解的步驟．这方法可推广到更一般的方程．

中央气象局在試作我国中、长期天气預报时，提出数学問題之一是对渦度方程[1]綫性化并考虑地形影响的数学模式．方程解的求出有助于对500mb月平均形势預报的进一步研究．因此全組同志在党的領导下和中央气象局协助下，經过艰苦奋战，作出了初步成果．作为向我們亲爱的党在元旦之际的献礼．

我們在理論联系实际和任务带动学科的正确方針和方法的指导下工作，还仅仅是个开始．因此，从联系气象业务工作来看，只是个練兵阶段．从偏微分方程角度来看，只是对三維三阶复合型的方程的初步探討．很不成熟．

我們在整理工作时，力求少引用較多的数学基本知識和气象专业名詞，便于气象工作者和数学工作者的参閱．

1. 500mb月平均形势預报的数学模式：

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{b_1-2b_2\sin^2\theta}{r_0}\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Delta z+2\left(\Omega+\frac{c_1+3c_2\cos^2\theta}{r_0}\right)\frac{\partial z}{\partial\lambda}=$$
$$=\mu\operatorname{cotg}\theta(z,\eta),\tag{1}$$

其中 $\Delta=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}$.

$$z(\theta,\lambda,0)=z_0(\theta,\lambda)\tag{1'}$$

并且 $z(\theta,\lambda,t)$ 是 $\lambda$ 以 $2\pi$ 为周期的函数，当 $\theta=0,\pi$ 时，$z(\theta,\lambda,t)$ 是有界的．$z(\theta,\lambda,t)$ 表500mb等压面的高度偏差．存在域是：$0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\lambda\leqslant2\pi$, $0\leqslant t<+\infty$．$\theta,\lambda,t$ 分别表余緯度，經度和时間．$b_1, b_2$ 是常数，一般有关系：$0\leqslant2b_2\leqslant b_1$, $15<b_1<25$（单位米/秒），在冬季时 $\frac{2b_2}{b_1}\leqslant0.5$，夏季时 $0.5<\frac{2b_2}{b_1}<1$.

$r_0$ 是地球的半径，等于 $6.37\times10^6$ 米．

$\Omega$ 是地球自轉的角速度，約为 $7.292\times10^{-5}$ 米/秒；

* 1959年4月1日收到．

$c_1 = b_1 - 4b_2;$

$c_2 = 4b_2;$

$\mu = \dfrac{2\Omega A_s}{H}$，$H = \dfrac{RT_s}{g} \approx 8000$ 米，$A_s$（无因次常数）可取作常数如 $\dfrac{1}{4}$，$T_s$ 是地面温度，$H$ 是均匀大气高度.

$$(z,\eta) = \frac{\partial z}{\partial \lambda}\frac{\partial \eta}{\partial \theta} - \frac{\partial z}{\partial \theta}\frac{\partial \eta}{\partial \lambda},\ \eta \text{ 表地形函数.}$$

上述的問題是气象局的同志們給我們提出的.

2. 我們暫不考慮(1)，而研究

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha(\theta)\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\Delta z + \beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0; \tag{2}$$

作变数替换

$$t = \bar{t}, \qquad \lambda - \alpha(\theta)t = \bar{\lambda}, \qquad \theta = \bar{\theta},$$
$$z(\theta, \lambda, t) = \bar{z}(\bar{\theta}, \bar{\lambda}, \bar{t}) = \bar{z}(\theta, \lambda - \alpha t, t),$$

則有

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\lambda}},$$
$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{t}} - \alpha(\theta)\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\lambda}},$$
$$\beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = \beta(\bar{\theta})\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\lambda}}.$$

記 $\Delta z = \overline{\Delta z}$，(2) 式可表作

$$\frac{\partial}{\partial t}\overline{\Delta z} + \beta(\bar{\theta})\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\lambda}} = 0. \tag{3}$$

定解条件变为

$$\bar{z}(\bar{\theta}, \bar{\lambda}, 0) = \bar{z}_0(\bar{\theta}, \bar{\lambda})$$
$$= z_0(\theta, \lambda - \alpha t).$$

(3)式两端对 $\bar{t}$ 积分得到：

$$\overline{\Delta z}(\bar{\theta}, \bar{\lambda}, \bar{t})\Big|_{\bar{t}=0}^{\bar{t}=\bar{t}} + \int_0^{\bar{t}} \beta(\bar{\theta})\frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{\lambda}}\, d\bar{t} = 0,$$

$$\Delta z(\theta, \lambda, t) = \Delta z_0(\theta, \lambda - \alpha t) - \int_0^{\bar{t}} \beta(\theta)\frac{\partial}{\partial \lambda} z(\theta, \bar{\lambda} + \alpha\bar{t}, \bar{t})\, d\bar{t} =$$
$$= \Delta z_0(\theta, \lambda - \alpha t) - \int_0^{\bar{t}} \beta(\theta)\frac{\partial}{\partial \lambda} z(\theta, \bar{\lambda} + \alpha\tau, \tau)\, d\tau =$$
$$= \Delta z_0(\theta, \lambda - \alpha t) - \int_0^{t} \beta(\theta)\frac{\partial}{\partial \lambda} z(\theta, \lambda + \alpha(\tau - t), \tau)\, d\tau.$$

由球面 Poisson 方程的解的表达式，(2) 立刻得到[2]：

$$z(\theta, \lambda, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \log\gamma \cdot \Delta z_0(\theta_0, \lambda_0 - \alpha(\theta_0)t)\ \sin\theta_0 d\theta_0 d\lambda_0 +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \log\gamma \int_0^t \beta(\theta_0)\frac{\partial}{\partial \lambda} z(\theta_0, \lambda_0 + \alpha(\theta_0)(\tau - t), \tau)\sin\theta_0 d\tau d\theta_0 d\lambda_0 +$$
$$+ f(t), \tag{4}$$

这里 $\gamma = \frac{1}{2}[1 - \cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\cos(\lambda - \lambda_0)]$, $f(t)$ 是任意函数,但 $f(0) = 0$, 以后不妨設这函数为零.

3. (4) 式是微分差分的 Volterra 型的积分方程.

(1°) 积分方程 (4) 与問題 (2), (1′) 是等价的. 因为,問題 (2), (1′) 的解显然适合 (4),反之若 $z(\theta, \lambda, t)$ 是 (4) 的解,則有

$$\Delta z(\theta, \lambda, t) = \Delta z_0(\theta, \lambda - \alpha t) - \int_0^t \beta(\theta) \frac{\partial}{\partial\lambda} z(\theta, \lambda + \alpha(\tau - t), \tau)\, d\tau$$

$$\frac{\partial \Delta z}{\partial t} = -\alpha \frac{\partial \Delta z_0}{\partial \bar{\lambda}} - \beta(\theta) \frac{\partial}{\partial\lambda} z(\theta, \lambda + \alpha(t - t), t) + $$

$$+ \alpha \int_0^t \beta(\theta) \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial(\lambda + \alpha(\tau - t))} z(\theta, \lambda + \alpha(\tau - t), \tau)\, d\tau,$$

$$\alpha \frac{\partial \Delta z}{\partial\lambda} = \alpha \frac{\partial \Delta z}{\partial\bar{\lambda}} - \alpha \int_0^t \beta(\theta) \frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial(\lambda + \alpha(\tau - t))} z(\theta, \lambda + \alpha(\tau - t), \tau)\, d\tau,$$

$$\therefore \quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha(\theta)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Delta z + \beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial\lambda} = 0.$$

(2°) 对积分方程 (4) 能够通过逐次迭代而得到解:

$$z(\theta, \lambda, t) = \sum_{n=0}^{\infty} z_n(\theta, \lambda, t), \tag{5}$$

其中
$$z_0(\theta, \lambda, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \log\gamma\, \Delta z_0(\theta_0, \lambda_0 - \alpha(\theta_0), t)\, \sin\theta_0\, d\theta_0\, d\lambda_0,$$

$$z_n(\theta, \lambda, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \log\gamma \int_0^t \beta(\theta_0)\frac{\partial}{\partial\lambda_0} z_{n-1}\, \sin\theta_0\, d\tau\, d\theta_0\, d\lambda_0.$$

需証明 (5) 式右端是一致收斂的,为此,改写 (4) 式,

$$z(\theta, \lambda, t) = z_0(\theta, \lambda, t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \beta(\theta_0)\, \sin\theta_0\, \log\gamma\, \frac{\partial'}{\partial\lambda_0} z(\theta_0, \lambda_0 +$$

$$+ \alpha(\theta_0)(\tau - t), \tau),\, d\lambda_0\, d\theta_0\, d\tau =$$

$$= z_0(\theta, \lambda, t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \int_0^{\pi} \beta(\theta_0)\, \sin\theta_0 d\theta_0 \Big\{[\log\gamma \cdot z(\theta_0, \lambda_0 +$$

$$+ \alpha(\theta_0)(\tau - t), \tau)]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\gamma \cdot z(\theta_0, \lambda_0 + \alpha(\theta_0)(\tau - t), \tau)\, d\lambda_0\Big\} =$$

$$= z_0(\theta, \lambda, t) + \frac{1}{4\pi}\int_0^t d\tau \left\{\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \beta(\theta_0)\, \sin\theta_0 \frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\gamma\, \cdot \right.$$

$$\left. \cdot\, z(\theta_0, \lambda_0 + \alpha(\theta_0)(\tau - t), \tau)\, d\lambda_0\, d\theta_0\right\}.$$

首先估計下式的值*,

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left|\beta(\theta_0)\, \sin\theta_0 \frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\gamma\right| d\theta_0\, d\lambda_0 \leqslant$$

* 見附录 1.

$$\leqslant \sup|\beta(\theta_0)|\int_0^\pi d\theta_0\left\{\int_0^\pi - \int_\pi^{2\pi}\frac{\sin^2\theta_0 \sin\theta \sin\lambda_0}{1-\cos\theta\cos\theta_0-\sin\theta\sin\theta_0\cos\lambda_0}d\lambda_0\right\} =$$
$$= 4\pi\sin\theta\sup|\beta(\theta_0)|$$
$$= 2N.$$

設

$$|z_0(\theta,\lambda,t)|\leqslant M,$$

則有:

$$|z_1(\theta,\lambda,t)|\leqslant MNt$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$|z_n(\theta,\lambda,t)|\leqslant MN^n\frac{t^n}{n!}.$$

从而級数 (5) 是一致收斂的. 由此立刻看到

$$z(\theta,\lambda,t)=\sum_{n=0}^{\infty}z_n(\theta,\lambda,t)$$

是方程 (2) 的解.

4. 从前述 (4) 式我們知道解 $z(\theta,\lambda,t)$ 具有如下的性質:

(1°) 如果 $z_0(\theta,\lambda)$ 有連續二阶导数且这些导数滿足 Hölder 条件, 指数为 $\mu$, 则解 $z(\theta,\lambda,t)$ 对变元 $\theta,\lambda$ 也有連續二阶导数, 且这些导数也滿足以 $\mu$ 为指数的 Hölder 条件; 对变元 $t$ 也有連續一阶导数[3].

(2°) 方程(2)的解不是唯一的. 它可以容許一个只依賴于 $t$ 的任意函数 $f(t)$ ($f(0)=$ $=0$) 的加項.

5. 前面我們探討了上述复合型且含有奇綫 $\theta=0,\pi$ 方程的解的存在問題, 也給出了用迭代求解的方法. 但在实际計算中仍有繁瑣的困难. 因此,我們希望得到較好的計算方法, 譬如說希望得到如下的結果.

为了消除积分方程中的差分形式,作代换

$$\begin{cases}\theta_0=x,\\ \lambda_0+\alpha(\theta_0)(\tau-t)=y,\\ \tau=u\end{cases}$$

解的表达式,化为

$$z(\theta,\lambda,t)=z_0(\theta,\lambda,t)+\int_0^t du\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\beta(x)\ \sin x\frac{\partial}{\partial y}\log\gamma\ (\theta,\lambda;x,$$
$$y+\alpha(x)(t-u))\,z(x,y,u)\,dy,\,dx.$$

令

$$K(\theta,\lambda,t;x,y,u)=\beta(x)\ \sin\frac{\gamma}{\partial y}\log\gamma\ (\theta,\lambda;x,y+\alpha(x)(t-u)),$$

記

$$K^{(n)}(\theta,\lambda,t;x,y,u)=K+\iiint K\cdot K\,dx\,dy\,du$$
$$+\cdots+\iiint\overbrace{\cdots\cdots}^{n-1\text{个}}\iiint\overbrace{K\cdot K\cdots K}^{n\text{个}}dx\,dy\,du\cdots dx\,dy\,du.$$

如能求得:

$$\lim_{n\to\infty} K^{(n)} = D(\theta, \lambda, t; x, y, u),$$

则有

$$z(\theta, \lambda, t) = z_0 + \int_0^t\int_0^\pi\int_0^{2\pi} D(\theta, \lambda, t; x, y, u)\, z_0 \cdot dy\, dx\, du,$$

或者能够求得$D$的近似表达式,则得近似解.

6. 到現在为止,我們討論了(2)(1)解的存在問題. 对于如下較一般的情况在适当的条件下,上述方法仍可应用.

(1°) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha(\theta, t)\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\Delta z + \beta(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

此时作变数替换:

$$\begin{cases}\bar\theta = \theta,\\ \bar\lambda = \lambda - \int_0^t \alpha(\theta, \tau)\, d\tau,\\ \bar t = t;\end{cases}$$

且在推演过程中各式作相应的改变就可以了.

(2°) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha(\theta, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\Delta z + \beta(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

此时作变数替换:

$$\begin{cases}\bar\theta = \theta,\\ \bar\lambda = \bar\lambda(\theta, \lambda, t),\\ \bar t = t,\end{cases}$$

其中 $\bar\lambda$ 是如下求得的:

設 $\Lambda(\theta, t; \bar\lambda, \bar t)$ 是問題

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{dt} = \alpha(\theta, \lambda, t),\\ \lambda(\theta, \bar t) = \bar\lambda\end{cases}$$

的解,命

$$\bar\lambda(\theta, \lambda, t) = \Lambda(\theta, 0; \lambda, t).$$

(3°) $$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1(\theta, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial \lambda} + \alpha_2(\theta, \lambda, t)\right)\Delta z + \beta(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0.$$

令

$$\begin{cases}\bar\theta = \bar\theta(\theta, \lambda, t),\\ \bar\lambda = \bar\lambda(\theta, \lambda, t),\\ \bar t = t,\end{cases}$$

其中 $\bar\theta, \bar\lambda$ 是如下求得的[4]:

設 $\lambda = \Lambda(\bar\theta, \bar\lambda, t, \bar t)$, $\Theta = (\bar\theta, \bar\lambda, t, \bar t)$ 是問題

$$\begin{cases}\dfrac{d\lambda}{dt} = \alpha_1(\theta, \lambda, t),\\ \dfrac{d\theta}{dt} = \alpha_2(\theta, \lambda, t),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\Lambda(0) = \bar{\lambda}, \\ \Theta(0) = \bar{\theta}\end{cases}$$

的解，命

$$\bar{\lambda}(\theta, \lambda, t) = \Lambda(\theta, \lambda, 0, t),$$
$$\bar{\theta}(\theta, \lambda, t) = \Theta(\theta, \lambda, 0, t).$$

$$(4^\circ)\quad \left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1(\theta, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial \lambda} + \alpha_2(\theta, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Delta z + \beta(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \lambda} + + \gamma(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0.$$

这时的变数替换和(3°)中的一样，只是在求相应的积分的解时較为复杂.

## (附 录 1)

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left|\beta(\theta_0)\ \sin\ \theta_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\ \gamma\right|d\theta_0\,d\lambda_0 \leqslant \sup|\beta(\theta_0)|\int_0^\pi d\theta_0\left\{\int_0^\pi - \int_\pi^{2\pi}\sin\theta_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\ \gamma\ d\lambda_0\right\} =$$
$$= 2\sup|\beta(\theta_0)|\int_0^\pi d\theta_0\int_0^\pi \sin\theta_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\ (1 - \cos\theta\cos\theta_0 - \sin\theta\sin\theta_0\cos\lambda_0)\,d\lambda_0 =$$
$$= 2\sup|\beta(\theta_0)|\int_0^\pi d\theta_0\{\sin\theta_0\log[1 - \cos(\theta_0+\theta)] - \sin\theta_0\log[1 - \cos(\theta_0-\theta)]\}.$$

首先計算：

$$\int_0^\pi \sin\theta_0\log[1 - \cos(\theta_0+\theta)]d\theta_0 = -\cos\theta_0\log[1-\cos(\theta_0+\theta)]\Big|_0^\pi +$$
$$+\int_0^\pi\frac{\cos\theta_0\sin(\theta_0+\theta)}{1-\cos(\theta_0+\theta)}d\theta_0 = 2\log\sin\theta + \int_0^\pi\frac{\cos[(\theta_0+\theta)-\theta]\sin(\theta_0+\theta)}{1-\cos(\theta_0+\theta)}d\theta_0 =$$
$$= 2\log\sin\theta + \int_0^\pi\left\{-\cos\theta\sin(\theta_0+\theta) + \frac{\sin\theta\sin^2(\theta_0+\theta)+\cos\theta\sin(\theta_0+\theta)}{1-\cos(\theta_0+\theta)}\right\}d\theta_0 =$$
$$= 2\log\sin\theta + \cos\theta[\cos(\theta_0+\theta) + \log(1-\cos(\theta_0+\theta))]_0^\pi +$$
$$+\sin\theta\int_0^\pi[1+\cos(\theta_0+\theta)]d\theta_0 =$$
$$= 2\log\sin\theta + \cos\theta\left[-2\cos\theta + \log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right] + \sin\theta[\theta_0 + \sin(\theta_0+\theta)]_0^\pi =$$
$$= 2\log\sin\theta + \cos\theta\left[-2\cos\theta + \log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right] + \sin\theta[\pi - 2\sin\theta].$$

同样可以求得：

$$\int_0^\pi \sin\theta_0\log[1-\cos(\theta_0-\theta)]d\theta_0$$
$$= -\cos\theta_0\log[1-\cos(\theta_0-\theta)]\Big|_0^\pi + \cos\theta[\cos(\theta_0-\theta) + \log(1-\cos(\theta_0-\theta))]_0^\pi -$$
$$-\sin\theta[\theta_0 + \sin(\theta_0-\theta)]_0^\pi =$$
$$= 2\log\sin\theta + \cos\theta\left[-2\cos\theta + \log\frac{1+\cos\theta}{1-\cos\theta}\right] - \sin\theta[\pi + 2\sin\theta].$$

因此

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\left|\beta(\theta_0)\ \sin\theta_0\frac{\partial}{\partial\lambda_0}\log\gamma\right|d\theta_0 d\lambda_0 \leqslant 4\pi\sup|\beta(\theta_0)|\sin\theta.$$

# (附 录 2)

1959 年元月 8 日上午，中央气象局主持召开了一次討論会．参加有苏联专家道布雷士曼，地球理物研究所，数学研究所等单位．会上有两个报告，一个是中央气象局的报告，另一个是本文的报告．报告后进行討論．今将有关本文的意見摘录如下．整理后未經发言人审閱，如有錯誤由我們負責．

叶篤正(地球所)：如果把西风带的月平均状态表作 $u(\theta,\lambda,t)$, $v(\theta,\lambda,t)$，則方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha_1(\theta,\lambda,t)\frac{\partial}{\partial\lambda}+\alpha_2(\theta,\lambda,t)\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\Delta z+\beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0$$

描述气象情况可能更为符合实际，其中 $\alpha_1=u$, $\alpha_2=v$．这也許对短期預报有益．

如果研究中，長期預报問題，可能方程要有新的項出現，只要基本气流从新的观点来定义．

苏联专家道布雷士曼：作为气象工作者很高兴看到数学家証明了解的收斂性，气象工作者很少这样作．因为我不是数学家，对于解法不去提更多的意見．但在方程的推演如从气象意义去考虑是可以簡化的．

这个方程是个很复杂的复合型方程．在推广形式中对于

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha(\theta,t)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Delta z+\beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0$$

很感兴趣．其中 $\beta\approx 2[r+\alpha(\theta)]$; $0.02<\frac{\alpha(\theta)}{\Omega}<0.04$, $\beta$ 几乎可以看做常数．

但对于 $\alpha=\alpha(\theta,\lambda,t)$ 的推广式，把 $\alpha$ 看作是 $\lambda$ 的函数，从物理意义来看是不明确的．因为 $\alpha$ 是緯圈的函数．

証明了迭代的收斂性是很好的．但用迭代法計算，由于收斂較慢，所需計算量还很大，应該考虑更有效的計算方法．因为我們是准备作長期預报．

最后，让我祝賀数学工作者与气象工作者的紧密合作．

顧震潮(地球所)：数学家帮助气象工作者了解了用积分方程解决問題的途径．解法是好的．方程也推广了．但怎样把問題精确化还須要研究．綫性化的方程中 $\alpha$ 不是 $\lambda$ 的函数．而在实际問題中 $\alpha$ 是 $t$ 的函数．此外，还有計算工作量的問題和初始場影响的問題有待研究．

廖洞賢(气象局)：

解虽不唯一，相差一个函数 $F(t)$，这在定时沒有关系，仅增加一个常数而已．

朱抱眞(地球所)：我同意专家的意見．是否可将解方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\alpha(\theta,t)\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\Delta z+\beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial\lambda}=0$$

的方法，用于二层模式．

对于 $\alpha$ 的值是否可以先期得到作为定值处理．

丑紀范(气象局)：考虑非綫性模式时，綫性化中曾想把阶部分放在左端，余放在右端，故有 $\frac{\partial z}{\partial\theta}$ 項存在．則导至方程

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha_1(\theta, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial \lambda} + \alpha_2(\theta, \lambda, t)\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\Delta z + \beta(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \lambda} + $$
$$+ \gamma(\theta, \lambda, t)\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

的定解問題的研究.

吳新謀(数学所): 我們抱着向气象工作者,尤其苏联专家学习的态度,来討論此問題的数学解法. 当然对問題的深入方面和近似解法等还有待于研究. 希望同志們多提意見,帮助我們改进工作.因为此問題是三維、三阶、复合型的方程,化为积分方程是差分、微分的 Volterra 型,这种問題在偏微分方程中也是不多見的. 我們需要进一步探討解的定性問題,非綫性方程問題的解以及迭代过程的計算等問題. 我們非常感謝同志們提出的宝貴意見.

## 参　考　文　献

[1] Гандин, Л. С., 动力气象学基础(中文譯本)第十章.
[2] Тихонов, А. Н., 数学物理方程(中文譯本)附篇.
[3] Кошелев, А. И., Априорные оценка в три обобщенные решения эллиптических уравнений и систем, *УМН*, XIII, вып. 4 (82), (1958), 29—88.
[4] Степанов, В. В., 微分方程教程(中文譯本)第七、八章,或吳新謀等編:数学物理方程第一册,第三、四章.

# THE INITIAL VALUE PROBLEM FOR A COMPOSITE TYPE EQUATION

*Section of Analysis, Institute of Mathematics, Academia Sinica*

Abstract

In connection with the weather forecasting, we consider the initial value problem for the equation of vorticity

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \alpha(\theta)\frac{\partial}{\partial \lambda}\right)\Delta z + \beta(\theta)\frac{\partial z}{\partial \lambda} = 0,$$

where $\Delta \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}$, with the initial condition

$$z(\theta, \lambda, 0) = z_0(\theta, \lambda).$$

The required solution $z(\theta, \lambda, t)$ is bounded in the region $D$:

$$0 < t, \quad 0 < \theta < \pi, \quad 0 < \lambda < 2\pi,$$

and periodic in $\lambda$ with period $2\pi$. Up to a constant term, the unique solution is found by a direct method.

Without essential difficulty, the method used here may be applied to solve the vorticity equation with more general coefficients.