氣 象 學 報
第25卷 第2期 1954年7月

帶狀恒定大氣環流下的地面氣壓分佈*

O. C. 別爾里揚特

提要 本文解決的是帶狀恒定大氣環流下地面氣壓的分佈。應用的是適用於大範圍運動即大氣環流的粘性流體力學方程式。並假定運動學的湍流粘性係數是高度的線性函數。

多羅德尼崔 (Дородницын, А. А.) 曾解決過帶狀恒定大氣環流下地面氣壓分佈的問題。就方程式各項大小來說，他所用的流體力學方程式，已簡化成相當於科慶 (Кочин) 的形式。解答顯得非常複雜。由此所得的氣壓分佈和氣壓梯度的質的圖樣和測得平均數據相符，但是量的方面有着巨大的差異。

在本文裏，應用了適合於大範圍運動，即大氣環流的粘性流體力學方程式。並假定運動學的湍流粘性係數是高度的線性函數。溫度和它的對緯度和高度的微係數依文獻 [3] 所定。

一、問題的建立

在我們所說的情況下，我們可以使用下列方程系[2]：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\frac{\partial \rho v_\theta}{\partial z}\right]+2\omega\,\rho\cos\theta\cdot v_\psi=\frac{1}{r}\,\frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\frac{\partial \rho v_\psi}{\partial z}\right]-2\omega\,\rho\cos\theta\cdot v_\theta=0\,,$$

$$p=p_0(\theta)\cdot\exp\left[-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T}\right], \tag{1.1}$$

$$v_r=-\frac{1}{\rho r^2\sin\theta}\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial\theta}\,(\rho v_\theta r\sin\theta)\,dz\text{。}$$

在這些方程式裏取的是球坐標：r—距中心的距離；θ—極距角；ψ—經度；v_r、v_θ、v_ψ—相當的速度成份；ρ—密度；p—氣壓；$p_0(\theta)$—地面氣壓；ν—運動學

* 原載蘇聯科學院地理與地球物理學叢刊，14 卷 3 期，1950年。作者原文爲 О. С. Берлянд，題目原文爲 "Распределение атмосферного давления по поверхности земли в случае стационарной зональной циркуляции атмосферы".

的湍流粘性係數；ω—地轉角速；a—地球半徑；g—重力加速；T—氣温；R—氣體常數；z_0—粗糙度。

先求方程式系 (1.1) 於前面兩個方程式的解。取 $V=v_\theta+iv_\psi$ 及 $\nu=cz$，得

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(cz\frac{\partial M}{\partial z}\right)-2i\omega\cos\theta\, M=\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \tag{1.2}$$

這裏 $M=\rho V$。

方程式 (1.2) 的邊界條件如下：

1) 在 $z=z_0$ 處，$M=0$。

2) 函數 M 在無窮遠處是有限的。

作變換：
$$x=2\sqrt{\frac{2i\omega\cos\theta\, z}{c}}$$

就得
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial M}{\partial x}\right)-xM=\frac{x}{2\,i\omega\, r\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial \theta}。 \tag{1.3}$$

這是倍塞爾型的方程式，它的解答是

$$M=C_1I_0(x)+C_2K_0(x)+I_0(x)\int_{\infty}^{x}xF_1(x)K_0(x)dx-$$
$$-K_0(x)\int_{x_0}^{x}xF_1(x)\,I_0(x)\,dx,$$

這裏 $x=y\sqrt{i}$；$y=2\sqrt{\frac{2\,\omega\cos\theta\cdot z}{c}}$；$I_0(x)$ 及 $K_0(x)$ 是複變數的倍塞爾函數；$F_1(x)=\frac{1}{2\,i\omega\gamma\cos\theta}\frac{\partial p}{\partial\theta}$。當 $x\to\infty$ 時，函數 $I_0(x)\to\infty$，那末按無窮遠處函數 M 有限性的條件應得 $C_1=0$。

由條件 1) 得

$$C_2=\frac{I_0(x_0)}{K_0(x_0)}\int_{x_0}^{\infty}xF_1(x)\,K_0(x)\,dx。$$

故
$$M=K_0(x)\left[\frac{I_0(x_0)}{K_0(x_0)}\int_{x_0}^{\infty}xF_1(x)\cdot K_0(x)\,dx-\int_{x_0}^{x}xF_1(x)\cdot I_0(x)\,dx\right]+$$
$$+I_0(x)\int_{\infty}^{x}xF_1(x)\,K_0(x)\,dx。 \tag{1.4}$$

二、決定氣壓梯度的方程式

因爲環流看做是帶狀定常的，通過緯度圈質量通量應等於零，由此

$$\int_{z_0}^{\infty}\rho\, v_\theta\, dz=0。 \tag{2.1}$$

從方程系 (1.1) 裏的第二個方程式得：

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(cz\frac{\partial \rho v_\psi}{\partial z}\right)=2\omega\,\rho\cos\theta\, v_\theta$$

或
$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial}{\partial z}\left(cz\frac{\partial \rho v_\psi}{\partial z}\right)dz=2\omega\cos\theta\int_{z_0}^{z}\rho v_\theta\,dz\,。$$

於是
$$cz\frac{\partial \rho v_\psi}{\partial z}\bigg|_{z_0}^{z}=2\omega\cos\theta\int_{z_0}^{z}\rho\, v_\theta\,dz\,。$$

把等式中取 $z=\infty$。在 $z=\infty$ 時，$\frac{\partial \rho v_\psi}{\partial z}\to 0$；故由 (2.1) 可得

$$\left(\frac{\partial \rho v_\psi}{\partial z}\right)_{z=z_0}=0\,;$$

於是氣壓梯度可由

$$\mathrm{Im}\left(\frac{\partial M}{\partial z}\right)_{z=z_0}=0 \tag{2.2}$$

的條件來決定。

從 (1,4) 式決定了微係數$\frac{\partial M}{\partial x}$：

$$\frac{dM}{dx}=K'_0(x)\left[\frac{I_0(x_0)}{K_0(x_0)}\int_{x_0}^{\infty}xF_1(x)\,K_0(x)\,dx-\int_{x_0}^{x}xF_1(x)\,I_0(x)\,dx\right]+$$
$$+I'_0(x)\int_{\infty}^{x}xF_1(x)\,K_0(x)\,dx\,。$$

在 $x=x_0$ 時得

$$\frac{dM}{dx}\bigg|_{x=x_0}=\frac{K'_0(x_0)\,I_0(x_0)-K_0(x_0)\,I'_0(x_0)}{K_0(x_0)}\int_{x_0}^{\infty}xF_1(x)\,K_0(x)\,dx\,。$$

或
$$\frac{dM}{dx}\bigg|_{x=x_0}=-\frac{1}{x_0K_0(x)}\int_{x_0}^{\infty}xF_1(x)\,K_0(x)\,dx\,。$$

因
$$x=y\sqrt{i}\,,\qquad K_0(y\sqrt{i})=\mathrm{ker}\,y+i\,\mathrm{kei}\,y\,,$$

故
$$\frac{dM}{dx}\bigg|_{x=x_0}=-\frac{1}{y_0\sqrt{i}\,(\mathrm{ker}\,y_0+i\,\mathrm{kei}\,y_0)}\int_{y_0}^{\infty}\frac{y}{2\omega r\cos\theta}\,\frac{\partial p}{\partial\theta}(\mathrm{ker}\,y+i\,\mathrm{kei}\,y)\,dy$$

及

$$\frac{dM}{dz}\bigg|_{z=z_0}=-\frac{1}{\mathrm{ker}\,y_0+i\,\mathrm{kei}\,y_0}\cdot\frac{1}{ry_0}\sqrt{\frac{1}{2c\omega\, z_0\cos\theta}}\int_{y_0}^{\infty}y\frac{\partial p}{\partial\theta}(\mathrm{ker}\,y+i\,\mathrm{kei}\,y)\,dy\,。$$

於是
$$\mathrm{Im}\left(\frac{dM}{dz}\right)_{z=z_0}=F(z_0)\left[\mathrm{ker}\,y_0\int_{y_0}^{\infty}y\,\mathrm{kei}\,y\frac{\partial p}{\partial\theta}dy-\mathrm{kei}\,y_0\int_{y_0}^{\infty}y\,\mathrm{ker}\,y\frac{\partial p}{\partial\theta}dy\right],$$

這裏

$$F(z_0)=-\frac{1}{(ker^2 y_0+kei^2 y_0)\, y_0 r}\sqrt{\frac{1}{2c\omega\, z_0 \cos\theta}}\ .$$

由條件 (2,2)，得到下面這決定，氣壓梯度的方程式

$$ker\, y_0\int_{y_0}^{\infty} y\, kei\, y\frac{\partial p}{\partial\theta}\, dy-kei\, y_0\int_{y_0}^{\infty} y\, ker\, y\frac{\partial p}{\partial\theta}dy=0\ .$$

因爲 y_0 取做很小很小，所以我們可以把上式寫成

$$\int_{y_0}^{\infty} y\, kei\, y\frac{\partial p}{\partial\theta}dy=0\ . \tag{2,3}$$

把 (2,3) 積分起來而決定氣壓梯度。

再說 $\dfrac{\partial p}{\partial\theta}$ 的計算。

由方程系 (1,1) 的第三個方程式得

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{\partial p_0}{\partial\theta}e^{-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T}}+p_0(\theta)e^{-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T}}\int_0^z\frac{\partial T}{\partial\theta}\frac{1}{T^2}dz\ 。$$

取 $p_0=P_0+p_0'$， 這裏 $P_0=101.1\dfrac{\text{噸}}{\text{米}\cdot\text{秒}^2}$； $p'_0=p'_0(\theta)$，在足够的精確度下可得

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{\partial p'_0}{\partial\theta}e^{-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T}}+\frac{P_0 g}{R}e^{-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T}}\int_0^z\frac{\partial T}{\partial\theta}\frac{1}{T^2}dz$$

或

$$\frac{\partial p}{\partial\theta}=\frac{\partial p'_0}{\partial\theta}f_1(z,\theta)+\frac{P_0 g}{R}f_2(z,\theta), \tag{2,4}$$

這裏

$$f_1(z,\theta)=e^{-\frac{g}{R}\int_0^z\frac{dz}{T}}；\ f_2(z,\theta)=f_1(z,\theta)\int_0^z\frac{\partial T}{\partial\theta}\frac{1}{T_2}dz\ 。$$

表 1.

$\varphi°$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	
p_0	101.1	101.1	101.3	101.56	101.56	101.38	101.19	101.13	101.05	101.06	實測值
$\dfrac{dp'_0}{\partial\varphi}$	0	0.572	1.316	0.744	-0.515	-1.058	-0.715	-0.400	-0.200	0	
p_0	101.1	101.16	101.23	101.28	101.30	101.29	101.21	101.07	100.93	100.87	算得值
$\dfrac{dp'_0}{\partial\varphi}$	0	0.408	0.363	0.254	0.0437	-0.289	-0.726	-0.902	-0.571	0	

把 (2,4) 的$\frac{\partial p}{\partial \theta}$代入 (2,3)，得

$$\frac{\partial p'_0}{\partial \theta}=\frac{\frac{P_0 g}{R}\int_{y_0}^{\infty} y\cdot kei\, y\cdot f_2(y,\theta)\,dy}{\int_{y_0}^{\infty} y\cdot kei\, y\cdot f_1(y,\theta)\,dy}。$$

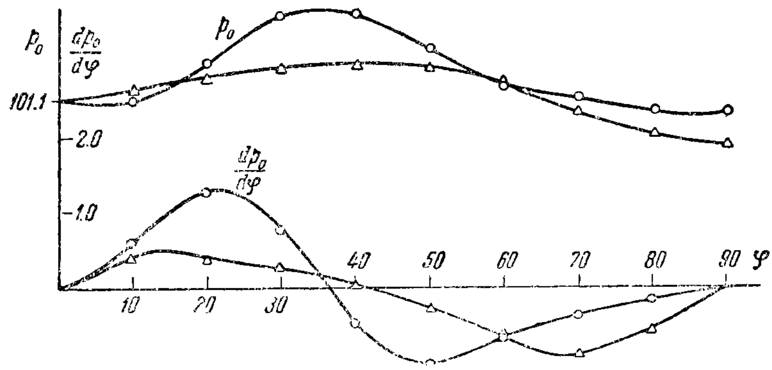

圖 1. （圖中圓圈爲測得值，三角爲算得值）

由 $\frac{\partial p}{\partial \theta}$ 的式子我們取下列數值：$P_0=101.1\frac{噸}{米\cdot秒^2}$；　$g=9.81$ 米/秒^2，　$R=287.04$ 米^2/秒$^2\cdot$度；$C=0.06$ (在 $z=5000$ 米的高度上 $\nu=300$ 米^2/秒)。T 和 $\partial T/\partial\theta$ 我們取自文獻 [3]。式子的結果表示在表 1 和圖 1。正如圖上所示，我們的式子所給的結果比起文獻 [1] 所算得的類似結果來已與平均觀測數值接近得多了。

蘇聯科學院地球物理研究所

文　　獻

[1]　多羅德尼崔，地球物理觀測總台集刊 (Труды ГГО) 第 18 卷，26—35，1937。
[2]　尤金及什維茨 (Юдин М. И. и Швец М. Б.)，同上，第 31 卷，42—52，1940。
[3]　布里諾娃 (Блинова Е. Н.)，蘇聯科學院地理及地球物理學叢刊，第 11 卷，第 1 期，3—13，1947。

（顧震潮譯）